

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 04/01/2026

Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

Όνοματεπώνυμο:

Θέμα Α

A₁. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A₂. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 2+3=5

A₃. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Μονάδες 3

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $f(x) = \ln|x|$, $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$.

β) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ τότε η f είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

γ) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$.

δ) Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$.

ε) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις h, g με $h(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ και $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

B₁. Βρείτε τη σύνθεση της g με τη h , δηλαδή τη συνάρτηση $h \circ g$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

B₂. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 4+5=9

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$, $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

B₃. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x) = +\infty$.

Μονάδες 4

B₄. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1, 2)$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} -x^3 + a, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

Γ₁. Βρείτε την τιμή του a ώστε η f να είναι συνεχής.

Μονάδες 8

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται $a = 0$.

Γ₂. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 7

Γ₃. Ένα κινητό σημείο M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x > 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης x του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y , αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 5

Γ₄. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g'(0) > 0$ και $g(0) = 0$.

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$(1) f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

$$(2) f(0) = 0.$$

$$(3) f(4) = \frac{1}{3} + e^{-2}.$$

Δ₁. Να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $f(x) = \frac{1}{x-1} + e^{-\sqrt{x}}$, για κάθε $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το \mathbb{R} .

Μονάδες 3+3=6

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι η F είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f στα διαστήματα $[0, 1)$ και $(1, +\infty)$, με $F(0) = 0$.

Δ_3 . Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = ax$, με $a < 0$, δεν εφάπτεται στη γραφική παράσταση της F .

Μονάδες 5

Δ_4 . α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (2,4)$, ώστε $F(x_0) = \frac{F(2)+F(4)}{2}$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι για το x_0 του ερωτήματος Δ_4 α), ισχύει επιπλέον ότι $x_0 < 3$.

Μονάδες 4

Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!