

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**Τάξη:** Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**Ημερομηνία:** 02/11/2025**Καθηγητές:** ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**Ονοματεπώνυμο:****Θέμα Α**

A1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g . Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μία συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε παίρνει πάντα σε αυτό μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m .

β) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, στο $\mathbb{R}_1$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ , μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . **Μονάδες 8**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \ln(x+1) + 1$, $x > -1$ και $h(x) = -\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

B2. Βρείτε τη σύνθεση της h με τη g , δηλαδή τη συνάρτηση $g \circ h$. **Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln(1 - \sqrt{x}) + 1$, $0 \leq x < 1$.

B3. Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης φ . **Μονάδες 5**

B4. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης φ στο διάστημα $(0,1)$ και υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi'(x)$. **Μονάδες 6**

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \alpha \cdot \eta\mu x + \beta, & x > 0 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ δύο σταθερές.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 0$. **Μονάδες 8**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 0$.

Γ2. Να δείξετε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $\left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$ και να βρείτε το $\xi \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$, ώστε $f'(\xi) = 0$. **Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) + 2\sin x$, $x \in [0, \pi]$.

Γ3. Να δείξετε ότι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, \frac{3\pi}{4})$ και $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi]$. **Μονάδες 6**

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [-2\sin \lambda \cdot x + f(\lambda) \cdot \sqrt{x^2 + 1}]$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in [0, \pi]$. **Μονάδες 5**

Θέμα Α

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{\eta\mu(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) f^2(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

α) $f(1) = 1.$

Μονάδες 4

β) $f'(1) = \frac{1}{2}.$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ (Μονάδες 5) και να χαράξετε

πρόχειρα τη γραφική της παράσταση (Μονάδες 2).

Μονάδες 7

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο

$$M(x_0, f(x_0)), \text{ με } x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Μονάδες 5

Δ4. Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ του προηγούμενου ερωτήματος. Αν E είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες $x'x, y'y$, τότε να δείξετε ότι:

α) $E = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x_0}{4}$ τετραγωνικές μονάδες .

Μονάδες 3

β) $\frac{(1-x_0^2) \cdot \sigma\upsilon\nu x_0}{4} < E < \frac{1}{4}.$

Μονάδες 2

Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!