

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 09/03/2025

Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α:

A₁. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . **Μονάδες 7**

A₂. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. **Μονάδες 4**

A₃. Πότε μία συνάρτηση καλείται κυρτή σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

A₄. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε πάντα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

2. Έστω το διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $c > 0$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c .

3. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, για κάθε $x \neq 0$.

4. Έστω μία συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

5. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ με $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$, έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

B₁. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $\alpha = -1$.

B₂. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

B₃. Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, 0)$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

B₄. Να δείξετε ότι η μοναδική ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f είναι η ευθεία $y = -1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = xe^{\lambda x+1}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x = -1$.

Γ₁. Να δείξετε ότι $\lambda = 1$ και να βρείτε το είδος του ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x = -1$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $\lambda = 1$.

Γ₂. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Γ₃. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{2}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < -1 < x_2 < 0$.

β) Να δείξετε ότι ισχύει $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{x_1 - x_2}{2x_1x_2}$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του ερωτήματος α).

Μονάδες 4+4=8

Γ₄. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^{2025} + \sqrt{-\frac{1}{2} - x}$, $x \leq -\frac{1}{2}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$

παίρνει μία μέγιστη τιμή M στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2x + 2f'(x)f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(0) = 1$.

Δ1. α) Να δείξετε ότι $x^2 + f^2(x) = 1$, $x \in [0,1]$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$.

Μονάδες 5+5=10

Δ2. Ένα κινητό ξεκινά απ' το σημείο $\Lambda(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης

$y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$. Καθώς διέρχεται απ' το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ η τεταγμένη του y

ελαττώνεται με ρυθμό 1cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του τη χρονική στιγμή που το κινητό διέρχεται από το σημείο A .

Μονάδες 5

Δ3. Δίνεται το σημείο $M(x, f(x))$, $x \in (0,1)$ και έστω B, Γ οι προβολές του M στους άξονες x' και y' αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $OBM\Gamma$, όπου O η αρχή των αξόνων, γίνεται μέγιστο όταν το $OBM\Gamma$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\eta\mu x} - e^{f(\eta\mu x)}) dx$.

Μονάδες 5

Οδηγίες εξέτασης: Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

Ευχόμαστε Επιτυχία!!!