Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
Τάξη: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ημερομηνία: **19/01/2025**
Καθηγητές: **ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**
Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α:

A_1. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της. Αν ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **Μονάδες 7**

A_2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **Μονάδες 4**

A_3. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. **Μονάδες 4**

A_4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

2. Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x\,|\,\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}_1$.

3. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

4. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, τότε η f είναι απαραίτητα σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

5. Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x},\ x\neq 1$ και η συνάρτηση $g(x)=\ln x,\ x>0$.

Β₁. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη της f^{-1}. **Μονάδες 7**

Β₂. Να βρείτε τη σύνθεση της g με την f, δηλαδή τη συνάρτηση $f\circ g$. **Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x},\ x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$ **.**

Β₃. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 6**

Β₄. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to e^+} h(x)$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}\beta, & x=0\\ \dfrac{x\ln(\alpha x)}{x-1}-x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$, όπου $\alpha>0$ και

$\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

Γ₁. Να δείξετε ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+}[x\ln(\alpha x)]=0$, για κάθε $\alpha>0$. **Μονάδες 5**

Γ₂. Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=0$. **Μονάδες 8**

Γ₃. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}(1,0)$.

Μονάδες 5

Γ₄. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=-3$ και $f(1)=e$.

Δ$_1$. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+4x-4,\ x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 6**

Δ$_2$. Να δείξετε ότι :

α) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$. **Μονάδες 4**

β) $f^{-1}(0)=\ln(4-4x_0)$, όπου x_0 η ρίζα του ερωτήματος Δ$_2$ α). **Μονάδες 3**

Δ$_3$. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=e^x$ και $h(x)=-x^2$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη. **Μονάδες 6**

Δ$_4$. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $F\left(\dfrac{3}{x_0}\right)<F\left(\dfrac{e}{1-x_0}\right)$, όπου x_0 η ρίζα του ερωτήματος Δ$_2$ α). **Μονάδες 6**

<u>Οδηγίες εξέτασης:</u> Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.

<u>Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες</u>

<u>Ευχόμαστε Επιτυχία!!!</u>