

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 27/10/2024

Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

Όνοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α:

A₁. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της .
Να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 7**

A₂. Να διατυπώσετε το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής. **Μονάδες 4**

A₃. Πότε μία συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$; **Μονάδες 4**

A₄. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε ισχύει $f(x) > 0$, κοντά στο x_0 .

2. Η εικόνα $f(\Delta)$, ενός διαστήματος Δ , μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

3. Η ισότητα $|\eta\mu x| = |x|$, ισχύει μόνο για $x = 0$.

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκην ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

5. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε και η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\sqrt{x-1}$.

B₁. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 7**

B₂. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ **Μονάδες 2**

ii) Βρείτε την παράγωγο της f , όπου αυτή ορίζεται στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 4**

B₃. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x^2) + x]$. **Μονάδες 5**

B₄. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} . **Μονάδες 4+3=7**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \geq 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta, & x < 0 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γ₁. Βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . **Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

Γ₂. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ στο $x_0 = 0$. **Μονάδες 6**

Γ₃. Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = f'(x) + f(x)$, στο διάστημα $[0, 2\pi]$. **Μονάδες 7**

Γ₄. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(-x)}$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα x_0 είναι η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x-1) \cdot f(x)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, 1)$, τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $M(\xi, g(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{2} \cdot (f(x_0 + e^{-x}) - f(x_0 - e^{-x})) \right] = 3 - x_0$.

Μονάδες 5

Δ4. i) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $\varphi(x) = \frac{|f(x)|}{x - x_0}$ στο x_0 .

Μονάδες 3

ii) Να βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $h^2(x) = f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Οδηγίες εξέτασης: Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

Ευχόμαστε Επιτυχία!!!