

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**Τάξη:** Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**Ημερομηνία:** 25/02/2024**Καθηγητές:** ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**Ονοματεπώνυμο:****ΘΕΜΑ Α:**

A1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε

ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Μονάδες 4

A3. Πότε μία ευθεία $y = \lambda x + \beta$ καλείται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$, τότε ισχύει πάντα ότι $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

2. Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο απ' τα τοπικά μέγιστα.

3. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

4. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$.

5. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

B₁. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B₂. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 6

B₃. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 6

B₄. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 1$, το $f(1) = 0$.

Γ₁. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$ καθώς και η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \\ f(x), & x > 0 \end{cases}.$$

Γ₂. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g :

α) είναι συνεχής.

β) έχει ακριβώς τρία κρίσιμα σημεία τα $x = 1, x = 0, x = -1$.

Μονάδες 3+5=8

Γ₃. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης της g με την f' , δηλαδή της συνάρτησης $f' \circ g$.

Μονάδες 6

Γ₄. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^\pi ((g(\sin x) - g(-\sin x)) \cdot \eta \mu x) dx$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 0$ για την οποία ισχύει ότι

$$|g(x) - g(y) - xe^{-x} + ye^{-y}| \leq (x - y)^{2024} \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = g(x) - xe^{-x}$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} . **Μονάδες 4**

β) Να δείξετε ότι η g έχει τύπο $g(x) = xe^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 3**

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3e^x = xe^4$, έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < 1$ και $x_2 > 2$.

Μονάδες 6

Δ3. α) Να δείξετε ότι το σημείο $A\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής

παράστασης της g .

Μονάδες 3

β) Να εξετάσετε αν το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{g'(x_2) \cdot x + x_2 e^{-x_2} - x_2 \cdot g'(x_2) - x e^{-x}}$ είναι καλώς ορισμένο.

Μονάδες 3

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\int_1^{x_2} g(t) dt}{x - x_2} - \frac{\int_{x_2}^1 (1 - e \cdot g(t)) dt}{x - 1} = 0$, μοναδική ρίζα στο $(1, x_2)$.

Μονάδες 6

Οδηγίες εξέτασης: Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

Ευχόμαστε Επιτυχία!!!