Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Τάξη: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ημερομηνία: 10/12/2023
Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ
Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α:

A$_1$. Να δείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σ' αυτό. **Μονάδες 7**

A$_2$. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle. **Μονάδες 4**

A$_3$. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f; **Μονάδες 4**

A$_4$. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Υπάρχει συνάρτηση που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

2. Ισχύει ότι $\eta\mu x < x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Αν $f(x) = \ln|x|$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, με $f'(x) = \dfrac{1}{|x|}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

4. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε παίρνει στο Δ μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+\sqrt{x}-1$ και $g(x)=e^x+\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

Β$_1$. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες. **Μονάδες 6**

Β$_2$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της . **Μονάδες 8**

Β$_3$. Να βρείτε την παράγωγο της f όπου αυτή ορίζεται. **Μονάδες 6**

Β$_4$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$, αλλά είναι αδύνατη στο διάστημα $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x\ln x+\beta, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Επιπλέον δίνεται ότι η ευθεία με εξίσωση $y=x-1$, εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$.

Γ$_1$. Βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $\alpha=1$ και $\beta=0$.

Γ$_2$. Να δείξετε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[0,1]$ και να βρείτε τον $k\in(0,1)$, για τον οποίο ισχύει $f'(k)=0$. **Μονάδες 8**

Γ$_3$. Ένα σημείο $\mathrm{M}(x,y)$, ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y=f(x)$, με $x>0$, στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του σημείου M, είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του σημείου M, αν ισχύει ότι $x'(t)>0$, για κάθε $t\geq 0$. **Μονάδες 5**

Γ_4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(0)=2023e$ και $g(1)=2024e$.

Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi\in(2023,2024)$, τέτοιος ώστε $f'(\xi)=f(2024)-f(2023)$.

β) υπάρχει $x_0\in(0,1)$, τέτοιος ώστε $g(x_0)=\dfrac{2024^{2024}}{2023^{2023}}$.

Μονάδες 3+3=6

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f'(-1)=-\dfrac{1}{2}$.

Δ_1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+3h)-f(-1+h)}{h}$. **Μονάδες 4**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $f(x)=\sqrt{-x}$.

Δ_2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη της . **Μονάδες 5**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=-x^2,\ x\geq 0$.

Δ_3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και h, έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη την οποία και να βρείτε. **Μονάδες 6**

Δ_4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $\varphi(x)=(4+h(x))(1-x-x^3)$. Να δείξετε ότι:

α) η φ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία εκ των οποίων στο διάστημα $(0,1)$. **Μονάδες 5**

β) υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της $f\circ\varphi$ το οποίο απέχει απ' την αρχή των αξόνων περισσότερο απ' ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της γραφικής παράστασης της $f\circ\varphi$. **Μονάδες 5**

<u>Οδηγίες εξέτασης:</u> Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.

<u>Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες</u>

<u>Ευχόμαστε Επιτυχία!!!</u>