

**Μάθημα:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Τάξη:** Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Ημερομηνία:** 29/10/2023

**Καθηγητές:** ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

**Ονοματεπώνυμο:**

**ΘΕΜΑ Α:**

**A1.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

Αν:

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον

$x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να μεταφέρετε την παρακάτω πρόταση κατάλληλα συμπληρωμένη στο τετράδιο σας ώστε να προκύπτει μία αληθής πρόταση:

«Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο ..... και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο ..... , τότε η σύνθεση τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  .»

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  καλείται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο  $x_0$  τότε είναι και παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
2. Έστω μία 1-1 συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Τότε για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f^{-1}(f(x)) = x$ .
3. Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία το  $g(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$ .
4. Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι: Παρουσιάζει στο  $x_0$  (ολικό) μέγιστο το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

5. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Μονάδες 5x2=10

### ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x+1}$ .

**B<sub>1</sub>**. Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$ .

Μονάδες 8

**B<sub>2</sub>**. Έστω η συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{x-1}$ . Να ορίσετε τη σύνθεση  $g \circ f$ .

Μονάδες 4

**B<sub>3</sub>**. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(f(x)-1)^2}$ .      ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f^2(x)+5}{f(x)} - \frac{f^2(x)+3}{f(x)+2} \right)$ .      iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$ .

Μονάδες 4+4+5=13

### ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha}{2}, & x \geq 1 \\ \frac{2\pi - \eta\mu(\pi x)}{\pi}, & x < 1 \end{cases}$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Γ<sub>1</sub>**. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι  $\alpha = 3$ .

**Γ<sub>2</sub>**. Να βρείτε την παράγωγο της  $f$ .

Μονάδες 6

**Γ<sub>3</sub>**. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2f(x)} + \kappa x)$  για τις διάφορες τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 6

**Γ<sub>4</sub>**. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = 3 + e^{1-x_0^2}$ .

Μονάδες 7

### **ΘΕΜΑ Δ:**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $x^2 + f^2(x) = 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 2$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $x \in [-2, 2]$  και να χαράξετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της  $f$ . **Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $|g(x) - g(0)| \leq |f(x) - 2|$ , για κάθε  $x \in [-2, 2]$ .

**Δ2.** Να δείξετε ότι η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x=0$  με  $g'(0) = 0$ . **Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται επιπλέον ότι για τη  $g$  ισχύει  $0 < g(1) < g(0) < \pi$ .

**Δ3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση :

$$(x - g(0))(x - g(1)) + (x - g(1))(x - \eta\mu g(1)) + (x - \eta\mu g(1))(x - g(0)) = 0 \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες.}$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^\lambda x^2 + x - 6 + 4\lambda}{f(x)}$  να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός. **Μονάδες 7**

**Οδηγίες εξέτασης: Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.**

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

**Ευχόμαστε Επιτυχία!!!**