Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Τάξη: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ημερομηνία: 05/03/2023
Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ
Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α:

Α$_1$. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **Μονάδες 7**

Α$_2$. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεώρηματος Rolle. **Μονάδες 4**

Α$_3$. Πότε μια ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$; **Μονάδες 4**

Α$_4$. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, τότε αυτή είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

3. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο απ' τα τοπικά μέγιστα.

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx.$$

5. Το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω απ' τον άξονα $x'x$ συν το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω απ' τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4}{x}+x$, με $x>0$.

Β$_1$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 8**

Β$_2$. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 8**

Β$_3$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, έχει ακριβώς μία κατακόρυφη ασύμπτωτη, τον άξονα yy'. **Μονάδες 6**

Β$_4$. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=\eta\mu x,\ x>0$ έχει λύση. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-xe^{\lambda x}+e^{-1}$, $x\in\mathbb{R}$, όπου λ μία πραγματική σταθερά. Επιπλέον δίνεται ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x=1$.

Γ$_1$. Να δείξετε ότι :

α) $\lambda=-1$. **Μονάδες 3**

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=1$, το $f(1)=0$. **Μονάδες 5**

Γ$_2$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e$ έχει μοναδική λύση, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-1,0)$.

Μονάδες 6

Γ$_3$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$. **Μονάδες 5**

Γ$_4$. Έστω F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ και $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}},F(x_{\mathrm{A}}))$, $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}},F(x_{\mathrm{B}}))$ είναι δύο σημεία της γραφικής παράστασης της F για τα οποία ισχύει $0<x_{\mathrm{A}}<x_{\mathrm{B}}$. Να δείξετε ότι ισχύει

$F(x_{\mathrm{B}})-F(x_{\mathrm{A}})<\dfrac{1}{e}(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0, & \alpha\nu\ x=0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & \alpha\nu\ x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ 1, & \alpha\nu\ x=1 \end{cases}$.

Δ$_1$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f :

α) είναι συνεχής. **Μονάδες 5**

β) είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$. **Μονάδες 5**

Δ$_2$. Να δείξετε ότι το $x=1$ δεν είναι κρίσιμο σημείο της f. **Μονάδες 3**

Δ$_3$. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2f(a)}{\pi}(\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x)$, με $x\in[0,\pi]$ και $\alpha>0$. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του α ώστε να ισχύει $g(x)\le 1$, για κάθε $x\in[0,\pi]$. **Μονάδες 6**

Για το παρακάτω ερώτημα δίνεται ότι η f είναι κοίλη.

Δ$_4$. Δίνεται ο αριθμός $\mathrm{I}=\int_0^1 f(x)dx$. Να δείξετε ότι:

α) Η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $y+2x=0$ είναι η $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$. **Μονάδες 2**

β) Ισχύει $\mathrm{I}+1<f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{I}+1\right)$. **Μονάδες 4**

<u>**Οδηγίες εξέτασης:**</u> **Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.**

<u>**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**</u>

<u>**Ευχόμαστε Επιτυχία!!!**</u>