Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Τάξη: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ημερομηνία: 08/01/2023
Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ
Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α:

Α₁. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό x σημείο του Δ,

τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. **Μονάδες 7**

Α₂. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών. **Μονάδες 4**

Α₃. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της ; **Μονάδες 4**

Α₄. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Το Θεωρήματα που είναι γνωστά ως κανόνες de l'Hospital ισχύουν και για πλευρικά όρια αν πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

2. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g'(x_0))$.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α,β), τότε παίρνει στο (α,β) μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

4. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε η παράγωγος της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+1}$.

Β₁. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Μονάδες 10

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^2-1,\ x\geq 0$.

Β₂. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0$. **Μονάδες 5**

Β₃. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{g(x)}}{x}$. **Μονάδες 5**

Β₄. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-xe^{x+1}-1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,0)$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της φ στο σημείο $\mathrm{A}(\xi,\varphi(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[-2,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2+1, & x\in[-2,0)\\ 2(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x), & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$ και έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}(0,2)$.

Γ₁. Να δείξετε ότι η εξίσωση της (ε) είναι η $y=2x+2$. **Μονάδες 5**

Γ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 8**

Γ₃. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\dfrac{f'(x)\ln f'(x)+1}{f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$. **Μονάδες 6**

Γ₄. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g:[-1,0]\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ, με κορυφές τα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(0,2)$, Β(-1,2) και Γ(-1,0). Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει με την (ε) τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x f(x)-f(0)}{x}=2$.

Δ₁. Να δείξετε ότι $f(0)+f'(0)=2$. **Μονάδες 4**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται επιπλέον ότι ισχύει $f'(x)-2x=f(x)-x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

Δ₃. Να δείξετε ότι :

α) Για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi_1\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-1}{x}$. **Μονάδες 3**

β) Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $f(x)<e\cdot x+1$. **Μονάδες 6**

Δ₄. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$h(x)=x-[x^2+(2-e)x-e+1]\cdot e^{-x}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\alpha^2}$ **,** $\alpha\in(0,\pi)$

σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία. **Μονάδες 7**

<u>Οδηγίες εξέτασης:</u> Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.

<u>Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες</u>

<u>Ευχόμαστε Επιτυχία!!!</u>