

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**Τάξη:** Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**Ημερομηνία:** 06/11/2022**Καθηγητές:** ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**Ονοματεπώνυμο:****ΘΕΜΑ Α:**

A₁. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A₂. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano.

Μονάδες 4

A₃. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 4

A₄. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Μία συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
2. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$.
3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) .
4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
5. Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \alpha \sin x, & x > 0 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

B₁. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής.

Μονάδες 7

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $\alpha = 1$.

B₂. Να βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

B₃. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f(x)} + x)$.

Μονάδες 6

B₄. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 1}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{x-1} + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ₁. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 6

Γ₂ α) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

Μονάδες 2

Γ₃. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g^2(x) + \sin^2 x = 1$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις g που ικανοποιούν τα παραπάνω.

Μονάδες 6

Γ₄. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \cdot \left| g\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right| + \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} \right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ₁. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

Έστω x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$. Θεωρούμε επιπλέον την συνεχή

συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^3 + x - 1) \cdot g(x) = x^5 + x^3 - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ₂. Να δείξετε ότι $g(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ₃. Δίνεται το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\mu) \cdot g(x) + 2x + 1}{x + 7}$. Να δειχθεί ότι αν το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός

αριθμός, τότε $\mu = x_0$.

Μονάδες 6

Δ₄. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = (f^{-1}(x))^2 \sqrt{1 - f^2(x)}$.

α) Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της h είναι το $[0, 1]$.

Μονάδες 5

β) Δίνονται τα σημεία $A(x, h(x))$, $B(1, 0)$ και O η αρχή των αξόνων. Αν η f^{-1} είναι συνεχής και τα σημεία O , A και B σχηματίζουν τρίγωνο, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $x \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OAB να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 4

Οδηγίες εξέτασης: Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

Ευχόμαστε Επιτυχία!!!