

**Μάθημα:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**Τάξη:** Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**Ημερομηνία:** 27/02/2022**Καθηγητές:** ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**Ονοματεπώνυμο:****ΘΕΜΑ Α:**

**A<sub>1</sub>.** Έστω  $f$  μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και
- Κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**A<sub>2</sub>.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα που είναι γνωστό ως κανόνας de l' Hospital κι αναφέρεται στη μορφή  $\frac{0}{0}$ .

**Μονάδες 4**

**A<sub>3</sub>.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , τότε ισχύει  $f''(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . »

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως **Αληθή** ή **Ψευδή**.

**Μονάδα 1**

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

**Μονάδες 2**

**A<sub>4</sub>.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α)** Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος  $\Delta$  στα οποία μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται είναι κρίσιμα σημεία της  $f$  στο  $\Delta$ .

**β)** Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ .

**γ)** Οι πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

**δ)** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

ε) Αν μία συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο  $x_0$  στο οποίο είναι παραγωγίσιμη τότε ισχύει πάντα  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x \leq 1 \\ \frac{2}{\sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases}$ .

**B<sub>1</sub>**. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής.

**Μονάδες 6**

**B<sub>2</sub>**. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x = 1$ .

**Μονάδες 6**

**B<sub>3</sub>**. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^4 f(x) dx$ .

**Μονάδες 6**

**B<sub>4</sub>**. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) - \ln(x-1) = 0$ , έχει ακριβώς μία ρίζα η οποία βρίσκεται στο διάστημα  $(2, 4)$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ:**

Η θερμοκρασία ενός ασθενούς  $t$  ώρες μετά τη χορήγηση ενός αντιπυρετικού φαρμάκου δίνεται απ' τη συνάρτηση  $f(t) = -4t^2 e^{-t} + 38$ , όπου  $t \geq 0$ .

**Γ<sub>1</sub>**. Να δείξετε ότι ο ασθενής παρουσιάζει την ελάχιστη θερμοκρασία 2 ώρες μετά τη λήψη του αντιπυρετικού η οποία είναι η  $f(2) = -\frac{16}{e^2} + 38$ .

**Μονάδες 6**

**Γ<sub>2</sub>**. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία  $y = 38$ .

**Μονάδες 6**

**Γ<sub>3</sub>**. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{f(0) - f(t)}{4} dt$ .

**Μονάδες 6**

**Γ<sub>4</sub>**. Θεωρήστε τη θερμοκρασία  $T_0 = f(1)$ . Να δείξετε ότι:

**α)** ο ασθενής παρουσιάζει ακριβώς δύο χρονικές στιγμές τη θερμοκρασία  $T_0$ .

**Μονάδες 4**

**β)** η θερμοκρασία του ασθενούς παραμένει μικρότερη ή ίση της  $T_0$ , για τουλάχιστον δύο ώρες.

**Μονάδες 3**

### **ΘΕΜΑ Δ:**

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f''(x) + f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 1$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (f(x) - \eta\mu x)^2 + (f'(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2$ , με  $x \in \mathbb{R}$  είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της  $f$ . **Μονάδες 6**

**Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι  $f(x) = \eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .**

**Δ2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\pi f(x) - 2x = 0$ , έχει ακριβώς δύο ρίζες στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , τις  $x = 0$  και  $x = \frac{\pi}{2}$ . **Μονάδες 6**

**Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $h(x) = -3\pi\eta\mu x - x^3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .**

**Δ3.** Να δείξετε ότι:

**α)** η  $h$  είναι κυρτή στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . **Μονάδες 4**

**β)**  $h(x) > -3\pi x$ , για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . **Μονάδες 4**

**Δ4.** Δίνεται ο αριθμός  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sigma\upsilon\nu t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot \sigma\upsilon\nu t \cdot e^{\eta\mu t} dt$ . Να δείξετε ότι  $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > -3\pi I$ .

**Μονάδες 5**

**Οδηγίες εξέτασης: Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.**

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

**Ευχόμαστε Επιτυχία!!!**