

**Μάθημα:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**Τάξη:** Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**Ημερομηνία:** 19/12/2021**Καθηγητές:** ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**Ονοματεπώνυμο:****ΘΕΜΑ Α:****A<sub>1</sub>.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
  - $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,
- τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 8****A<sub>2</sub>.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:« Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , τότε ισχύει $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . »**α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως **Αληθή** ή **Ψευδή**.**Μονάδα 2****β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).**Μονάδες 3****A<sub>3</sub>.** Να μεταφέρετε την παρακάτω πρόταση στο τετράδιό σας, κατάλληλα συμπληρωμένη, ώστε να προκύψει ένας αληθής ισχυρισμός:

«Έστω μία συνάρτηση  $f$  και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της  $C_f$ . Αν υπάρχει το \_\_\_\_\_ και είναι ένας πραγματικός αριθμός  $\lambda$ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A$ , την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται \_\_\_\_\_ και έχει συντελεστή διεύθυνσης \_\_\_\_\_.»

**Μονάδες 6****A<sub>4</sub>.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:**1.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\eta\mu x \leq x$ .**2.** Ισχύει η ισοδυναμία  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$ .**3.** Η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει $f'(x) = x^\alpha \cdot \ln \alpha$ .**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Β:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{x - 2}$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , η οποία έχει στο  $x = 1$  κλίση ίση με  $-3$ .

**B<sub>1</sub>**. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι  $\alpha = 2$ .**

**B<sub>2</sub>**. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

**B<sub>3</sub>**. Να υπολογίσετε τα όρια:

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

**β)**  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\sin \pi x}$

**Μονάδες 4 + 4 = 8**

**B<sub>4</sub>**. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g(x) = f(x) + e^{1-2x}$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Γ:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1$  με  $x > 0$ .

**Γ<sub>1</sub>**. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνονται επιπλέον οι συναρτήσεις  $g, h$  που ορίζονται από τους τύπους  $g(x) = e^{x-1}$  και  $h(x) = 1 - \ln x$  αντίστοιχα.**

**Γ<sub>2</sub>**. Να δείξετε ότι η  $C_g$  με τη  $C_h$  έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.

**Μονάδες 7**

**Γ<sub>3</sub>**. Έστω  $F$  μία παράγουσα της  $f$  στο  $(0, +\infty)$ . Να δείξετε ότι  $F(2\pi) - F(\pi) < F(3\pi) - F(2\pi)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ<sub>4</sub>**. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $\varphi(x) = |f(x)|$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x = 1$ .

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Δ:**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $(x \cdot f(x) + 1)^2 = x^2 + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ<sub>1</sub>**. **α)** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ .

**Μονάδες 2**

**β)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

**Μονάδες 5**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \ln(e^{x-1} + 1) - \ln 2 + \frac{1}{2}$ .

Δ<sub>2</sub>. Να δείξετε ότι:

α) Η εφαπτομένη της  $C_f$  στην αρχή των αξόνων είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση  $y = \frac{1}{2}x$ .

**Μονάδες 3**

β) Η εφαπτομένη (ε) της  $C_f$  εφάπτεται της  $C_g$  σε κάποιο σημείο  $M(x_0, g(x_0))$  με  $x_0 > 0$ .

**Μονάδες 4**

Δ<sub>3</sub>. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\left(f'(x) - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(g'(x) - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}x - f(x)\right) \cdot g''(x)$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

**Μονάδες 5**

Δ<sub>4</sub>. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $h'(x) \leq \frac{1}{2}$ , για κάθε

$x \in (0,1)$ ,  $h(0) = 0$  και  $h(1) = \frac{1}{2}$ . Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $h$  είναι το ευθύγραμμο

τμήμα με άκρα την αρχή των αξόνων και το σημείο  $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

**Μονάδες 6**

**Οδηγίες εξέτασης:** Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

**Ευχόμαστε Επιτυχία!!!**