

**Μάθημα:** Μαθηματικά Προσανατολισμού

**Τάξη:** Γ' Λυκείου

**Ημερομηνία:** 21/02/2021

**Καθηγητές:** ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

**Όνοματεπώνυμο:**

### ΘΕΜΑ Α :

**A<sub>1</sub>.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 7**

**A<sub>2</sub>.** Πότε μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1 – 1;

**Μονάδες 4**

**A<sub>3</sub>.** Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A<sub>4</sub>.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τότε  $f''(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .»

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή.

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

**Μονάδες 1+3=4**

**A<sub>5</sub>.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α)** Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης, δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

**β)** Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες.

**γ)** Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μίας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  είναι και κρίσιμα σημεία της  $f$  στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Β :

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = e^x + 1$ .

**B<sub>1</sub>.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση  $h$  με τύπο  $h(x) = \ln(e^x + 1)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B<sub>2</sub>**. Να δείξετε ότι η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**B<sub>3</sub>**. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $h$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  τον άξονα  $x'x$  και πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ , την ευθεία  $y = x$ .

**Μονάδες 5**

**B<sub>4</sub>**. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της  $h$  και της αντίστροφης της.

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Γ :**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $(e^x + 1)f(x) + (e^x + x - 1)f'(x) = 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ<sub>1</sub>**. Να δείξετε ότι  $(1 - x)e^x \leq 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 0$ . **Μονάδες 6**

**Γ<sub>2</sub>**. Να δείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x + x - 1}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ<sub>3</sub>**. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το διάστημα  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 3+3=6**

**Γ<sub>4</sub>**. Δίνεται η συνάρτηση  $g$  η οποία ορίζεται από τον τύπο  $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ , όπου  $f^{-1}$  η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ . Αν η  $f^{-1}$  είναι συνεχής, τότε:

**α)** Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι το  $D_g = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

**Μονάδες 2**

**β)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ .

**Μονάδες 5**

### **ΘΕΜΑ Δ :**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^4 + x^2 + x + \sigma \nu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ<sub>1</sub>**. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  και ότι η ευθεία με εξίσωση  $y = x + 1$  είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, 1)$ .

**Μονάδες 3+2=5**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(1, 0)$  και για την οποία ισχύει η σχέση  $g(x) \leq (\ln(g'(1)) + 1) \cdot (x - 1)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ<sub>2</sub>**. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $\Gamma(1, 0)$  έχει κλίση ίση με 1.

**Μονάδες 5**

**Δ<sub>3</sub>**. Δίνεται κύκλος ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Gamma$ , όπου  $A, \Gamma$  τα σημεία των ερωτημάτων  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ . Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$  με διαγώνιο την  $A\Gamma$  που μπορούμε να εγγράψουμε στον κύκλο, αυτό με το μέγιστο εμβαδόν είναι τετράγωνο.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Δίνεται η συνάρτηση  $h$  με  $h(x) = a \cdot g'(x) \cdot (x^2 - 2(f(a) - g(a+1))x + 1)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $a \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να δείξετε ότι η  $h$  έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο  $\mathbb{R}$ . **Μονάδες 5**

**β)** Να δείξετε ότι η  $h$  έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο στο  $\mathbb{R}$ . **Μονάδες 4**

*Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες*

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**

ΦΑΣΜΑ Agri Group