Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
Τάξη: Γ΄ Λυκείου
Ημερομηνία: 20/12/2020
Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ
Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α :

Α1. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

Μονάδες 6

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: ¨Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό.¨

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α). **Μονάδες 1+3=4**

Α4. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα του Rolle. **Μονάδες 4**

Α5. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{|x|}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ) Οι συναρτήσεις f και f' έχουν υποχρεωτικά το ίδιο πεδίο ορισμού. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^x+x-1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Μονάδες 6**

Β2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^2}$. **Μονάδες 6**

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (-1,0)$ ώστε $f(x_0)=-1$. **Μονάδες 6**

Β4. α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[0,1]$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Μ να είναι κάθετη στην ευθεία ε με εξίσωση $y=-\dfrac{1}{e}x$. **Μονάδες 2+5=7**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha\cdot x, & x\le 0 \\ \beta\cdot\eta\mu 2x, & x>0 \end{cases}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Επιπλέον για την f πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[-2,\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ1. α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$.

β) Να βρείτε όλα τα $\xi\in\left(-2,\frac{\pi}{2}\right)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$. **Μονάδες 5+5=10**

Γ2. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στην αρχή των αξόνων Ο. Να δείξετε ότι η ε έχει εξίσωση $y=2x$ και ότι με τη C_f έχουν μοναδικό κοινό σημείο το Ο. **Μονάδες 5**

Γ3. Έστω F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x)=x^2$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{x+f(x)}$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln x-x+2$, για κάθε $x>0$.

Δ1. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(0,1)$ και στο διάστημα $(1,+\infty)$.
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία μικρότερη του ένα και μία μεγαλύτερη του ένα. **Μονάδες 6+2=8**

Για τα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ως x_1,x_2 με $x_1<x_2$ τις ρίζες της $f(x)=0$.

Δ2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x)=|f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=x_2$. **Μονάδες 5**

Δ3. Έστω F μία παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι

$$(F(x_2)-F(1))\left(e^{F(1)}-e^{F(x_1)}\right)<(F(1)-F(x_1))\left(e^{F(x_2)}-e^{F(1)}\right).$$ **Μονάδες 6**

Δ4. Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $M(x_0,h(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής παράστασης της h, ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο M και A,B τα σημεία τομής της ε με τους άξονες $x'x$ και yy' αντιστοίχως. Αν για κάθε $x_0>0$, το Μ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB και η γραφική παράσταση της h τέμνει τη γραφική παράσταση της f στο $x=1$, να βρείτε τον τύπο της h. **Μονάδες 6**

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!