Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού**
Τάξη: Γ΄ Λυκείου
Ημερομηνία: 18/10/2020
Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ
Ονοματεπώνυμο:

Θέμα Α

Α₁. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 7**

Α₂. Πότε δύο συναρτήσεις f, g καλούνται ίσες; **Μονάδες 6**

Α₃. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
ii. Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$.
iii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.
iv. Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές. **Μονάδες 8**

Α₄. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη.»
α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως **αληθή** η **ψευδή**. **Μονάδα 1**
β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α). **Μονάδες 3**

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\eta\mu x+a^2, & x\geq 0 \\ x^3+a\,\eta\mu x+1, & x<0\end{cases}$, με $a\in\mathbb{R}$.

Β₁. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η f είναι:
α) συνεχής στο $x_0=0$ **Μονάδες 5**
β) παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. **Μονάδες 5**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $a=1$.

Β₂. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.
Μονάδες 5

Β₃. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\eta\mu x}{x^2+x+1}$. **Μονάδες 5**

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)-1}$. **Μονάδες 5**

<u>Θέμα Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(e^{x-1}+x-2)(1-x\ln x)$, για κάθε $x>0$.

Γ₁. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{1}{x}=\ln x$ έχει ακριβώς μία ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(1,e)$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ως x_0 τη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Γ₁.

Γ₂. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα σε δύο ακριβώς σημεία τα $\mathrm{A}(1,0)$ και $\mathrm{B}(x_0,0)$. **Μονάδες 6**

Γ₃. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in(0,+\infty)$ ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x+f(\lambda)}{x}$ να είναι ίσο με 2.

Μονάδες 5

Γ₄.α) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε x που ανήκει στο διάστημα $(1,x_0)$, ενώ $f(x)<0$ για κάθε x που ανήκει στα διαστήματα $(0,1)$ ή $(x_0,+\infty)$. **Μονάδες 4**

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\kappa\in(1,x_0)$ για τον οποίο η συνάρτηση f παίρνει στο $(0,+\infty)$ μία μέγιστη τιμή Μ. **Μονάδες 4**

<u>Θέμα Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=e^x-e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{g(x)}-e^{-g(x)}=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₁. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$. **Μονάδες 4**

Δ₂. Να δείξετε ότι $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

Δ₃.α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

β) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

Δ₄. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} g(x), & x\le 0 \\ -f(x), & x>0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της h στο διάστημα $(-\infty,0]$ και το σύνολο τιμών της h στο διάστημα $(0,+\infty)$. **Μονάδες 4**

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $h(x)=g(\lambda)$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!