

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2019

Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

Όνοματεπώνυμο:

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:
Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 8

A2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A . Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f ;

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία απ' τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση:

α. Τα θεωρήματα που είναι γνωστά ως κανόνες de L' Hospital ισχύουν και για πλευρικά όρια αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 6

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

“Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$$

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής. (μονάδες 2)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 5

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{2x} + x^2 - 2x + 1$.

B1. Να βρείτε την f' .

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι η f' είναι "1-1".

Μονάδες 6

B3. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = e^2 - 2$.

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη στον $x'x$ άξονα.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 + \eta\mu x}{x} = 2$
- $f'(x) \cdot f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = -3$
- $f''(0) = 2$

Γ1. Να δείξετε ότι: **α)** $f(0) = -1$.
β) $f'(0) = 1$.

Μονάδες 3

Μονάδες 3

Γ2. α) Να δείξετε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) + |\eta\mu x| = |x|$ έχει λύση.

Μονάδες 4

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (0,1)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = -2$.

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x + 1 + \eta\mu^2 x}{x^2}$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) + x + e^\lambda, & x \geq 0 \\ (x+1)^2 - \lambda - 2, & x < 0 \end{cases}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε ακέραιο αριθμό a ώστε η εξίσωση $e^x + x + 1 = 0$ να έχει μοναδική λύση η οποία να βρίσκεται στο διάστημα $(a, a+1)$. **Μονάδες 5**

Για τα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε x_0 τη λύση της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x=0$, διέρχεται απ' το σημείο $A(x_0, x_0 - 1)$. **Μονάδες 7**

Για τα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\lambda = x_0$.

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f σε καθένα απ' τα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, $\Delta_2 = (-1, 0)$, $\Delta_3 = [0, +\infty)$ και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. **Μονάδες 8**

Δ4. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της $f(x) = 0$ με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με τον άξονα $x'x$ να είναι παραπληρωματική της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία OM με τον άξονα $x'x$, όπου O η αρχή των αξόνων. **Μονάδες 5**

Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!