

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/10/2019

Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

Ονοματεπώνυμο:

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 ; **(Μονάδες 5)**

A2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. **(Μονάδες 8)**

A3. Να επιλέξετε και να γράψετε στο τετράδιο σας τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις:

1. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε:

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 .

β) Ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D_f$.

γ) Ισχύει $f(x_0) \geq 0$.

δ) Ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

2. Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν:

α) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

β) Υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

γ) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της παράσταση σε δύο τουλάχιστον σημεία.

δ) Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις ως προς x . **(Μονάδες 6)**

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας συμπληρωμένη κατάλληλα την επόμενη πρόταση:

«Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο τότε η σύνθεσή τους είναι συνεχής στο..... » (Μονάδες 6)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια. (Μονάδες 7)

B2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f(x)}$. (Μονάδες 6)

B4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι "1-1". (Μονάδες 6)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1)$.

Γ1. α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda x^2 + x + 2}{x+1}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της. (Μονάδες 6)

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και

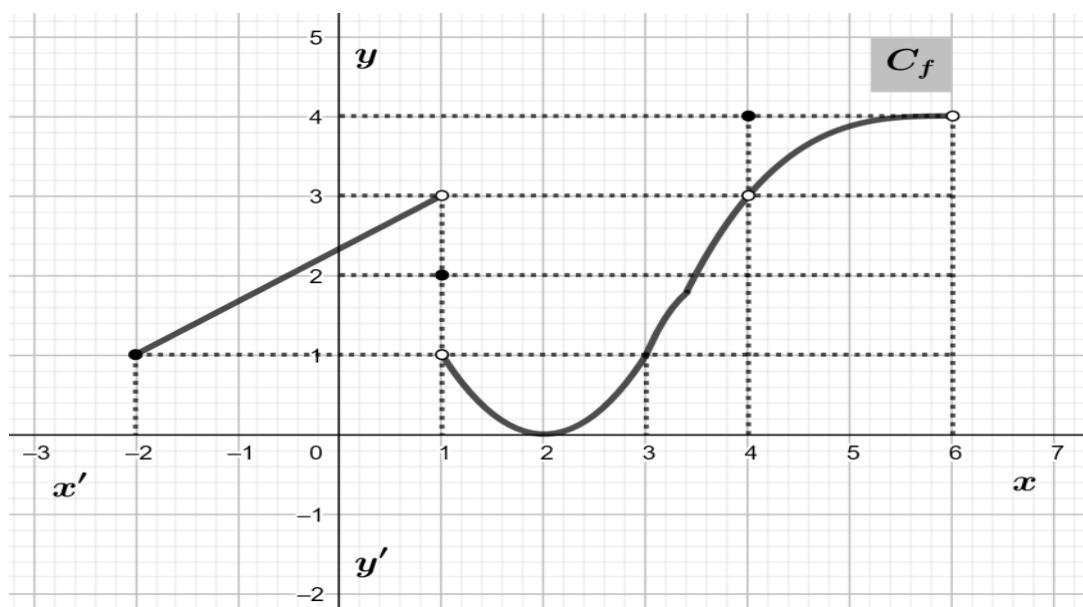
τύπο $g(x) = \frac{1}{e^x - 1} - 1$.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[g(x) \cdot \left(\operatorname{συν} \frac{1}{g(x)} - 1 \right) \right]$. (Μονάδες 5)

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $g(8x^2 + 6) - g(2x^4 + 5) < g(2x^4 + 6) - g(8x^2 + 5)$. (Μονάδες 4)

Θέμα Δ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .



Δ1. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε τα όρια **α)** $\lim_{x \rightarrow 4} f(f(x))$ **β)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{3x + \eta\mu x}{x}\right)$.

(Μονάδες 6)

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$|g(x) - 1| \leq e^{-\frac{1}{f(x)}} \text{ για κάθε } x \in (1, 2) \cup (2, 3).$$

Δ3. Να δείξετε ότι $g(2) = 1$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \lambda^2 \cdot g^2(x) + (\lambda^2 + 1) \cdot g(x) - 2}{g^2(x) - 1} = \lambda$.

(Μονάδες 7)

Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!