

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 16/03/2019

Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

Όνοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α :

Α₁. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F μία παράγουσα της f στο Δ , τότε να δείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α₂. Να μεταφέρετε την παρακάτω πρόταση κατάλληλα συμπληρωμένη στο τετράδιο σας ώστε να προκύπτει μία αληθής πρόταση:

“Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τα σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το....., λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .”

Μονάδες 4

Α₃. Πότε μία ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α₄. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α) Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$.

β) Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του

βαθμού του παρονομαστή δεν έχουν ασύμπτωτες.

γ) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν και

μόνον αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$.

δ) Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x_0) = 0$.

ε) Το μεγαλύτερο απ' τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- B₁.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 7**
- B₂.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής. **Μονάδες 6**
- B₃.** Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$. **Μονάδες 6**
- B₄.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

(1) $x \cdot f'(x) + (1+x)^{2018} = 2018x \cdot (1+x)^{2017} + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(2) $F(x) = \frac{f(x) - (1+x)^{2018}}{x}$, για κάθε $x \neq 0$

(3) $F(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Γ₁. α) Να δείξετε ότι η F είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 6

Μονάδες 4

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $f(x) = (1+x)^{2018}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ₂. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 1 + 2018x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. **Μονάδες 5**

Γ₃. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (1+x)f(x) - 1 - 2019x - 2019 \cdot 1009 \cdot x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς και η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = g(x) \cdot h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την ανίσωση $\varphi(f(x)) \leq \varphi\left(1 + 2018x \cdot \int_0^1 t \cdot e^t dt\right)$, για $x \geq 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ όπου $\int_1^2 f(t)dt = I$ και $\int_0^1 f(t)dt = J$.

Επιπλέον δίνονται οι συναρτήσεις g, h με τύπους $g(x) = e^x - I \cdot x$ και $h(x) = I \cdot x^4 - 4e \cdot x^3 + 6I \cdot x^2 + x + 1$ αντίστοιχα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για τη g ισχύει η σχέση $g(\ln(J) + J) = g(J^2)$.

Δ₁. Να βρείτε την τιμή του I ώστε $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η h να είναι κυρτή στο \mathbb{R} . **Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $I = e$.

Δ₂. Να δείξετε ότι $J = 1$.

Μονάδες 5

Δ₃. Δίνονται τα σημεία $A(1-e, 0)$ και $M(0, 1)$. Να δείξετε ότι:

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο M είναι κάθετη στην AM .

Μονάδες 3

β) Το σημείο της γραφικής παράστασης της g το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση απ' το σημείο A είναι το M .

Μονάδες 5

Δ₄. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ' τον άξονα $x'x$, τις ευθείες $x = 2$, $x = 3$ και τη γραφική παράσταση της f . Να δείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $F(x) = f(x+1) - f(x)$, με $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

β) $E > 2e - 1$.

Μονάδες 3

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες
Ευχόμαστε Επιτυχία!!!