

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 19/ 01 / 2019

Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

Όνοματεπώνυμο:

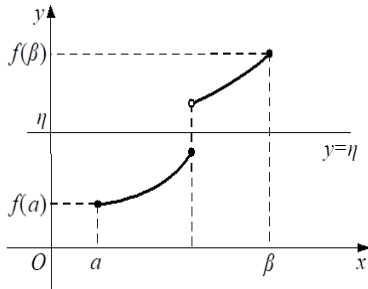
ΘΕΜΑ Α :

A₁. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε να δείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. **Μονάδες 7**

A₂. Να μεταφέρετε την παρακάτω πρόταση κατάλληλα συμπληρωμένη στο τετράδιό σας ώστε να προκύπτει μία αληθής πρόταση:

“Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και συνάρτησης f είναι διάστημα.” **Μονάδες 4**

A₃. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών για την f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες 4

A₄. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

β) Αν $\alpha > 0$ τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x \cdot \alpha^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon \rho x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma \upsilon \nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$.

ε) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο (α, β) , τότε η f παίρνει στο (α, β) μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1$.

B₁. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

B₂. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 10

B_{3. α)} Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = (e-1 + \ln 2) \cdot x$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = e^{x-1} + x \ln x - x$, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $x + y = 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y = 3x - 2$.

Γ₁. Να δείξετε ότι η ε με τη γραφική παράσταση της f έχουν δύο κοινά σημεία αλλά εφάπτονται σε ένα μόνο απ' αυτά.

Μονάδες 5

Γ₂. Να βρείτε όπου ορίζεται, την παράγωγο της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = x\sqrt{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ₃. Σημείο K κινείται επί της καμπύλης $y = f(x)$ με $x \geq 0$, ξεκινώντας απ' την αρχή των αξόνων. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 5

Γ₄. Δίνεται η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = (f(x) - a - \ln a) \cdot \eta\mu x$, με $a > 0$. Αν η γραφική παράσταση της h τέμνει τον άξονα x' σε σημείο με τεταγμένη $x_0 = 1$, να δείξετε ότι:

α) $a = 1$.

Μονάδες 5

β) Υπάρχει $\rho \in (0, 1)$, τέτοιος ώστε $3\varepsilon\varphi\rho = \frac{1}{\rho^2} - \rho$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνονται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι:

(1) $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (2) $f(1) = -f(-1) = 1$. (3) $f\left(\frac{g(0)-1}{2}\right) = g(0) - 1$.

(4) $(g(\eta\mu x))^2 = e^{2x} - e^{-2x} \eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (5) g παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$.

Δ₁. Να δείξετε ότι $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ₂. Να δείξετε ότι $g(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 7

Δ₃. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $A(0, g(0))$, με τους άξονες.

Μονάδες 7

Δ₄. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{g(\eta\mu x)}{x}\right) - f(\sigma\upsilon\nu x) \right]$.

Μονάδες 6

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες
Ευχόμαστε Επιτυχία!!!**