Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Τάξη: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ημερομηνία: 03/ 11 / 2018
Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ
Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α :

Α$_1$. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:
Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$. **Μονάδες 7**

Α$_2$. Να μεταφέρετε την παρακάτω πρόταση κατάλληλα συμπληρωμένη στο τετράδιο σας ώστε να προκύπτει μία αληθής πρόταση:
"Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο….. και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο….. , τότε η σύνθεση τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0 ." **Μονάδες 4**

Α$_3$. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Α$_4$. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

β) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0$.

γ) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δε μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

ε) Μία συνάρτηση είναι 1-1 αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha, & x<0\\ x^2+x+2, & x\geq 0\end{cases}$ όπου $\alpha\in\Re$.

Β$_1$. Να δείξετε ότι $\alpha=2$. **Μονάδες 7**

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ως δεδομένο ότι $\alpha=2$.

Β$_2$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=0$. **Μονάδες 8**

Β₃. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)-2}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)-2}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$ **Μονάδες 3+3+4=10**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{x+1}+\alpha-3$ για κάθε $x\in\Re$, όπου $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+2}\right)$.

Γ₁. Να δείξετε ότι $\alpha=2$. **Μονάδες 6**

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνονται οι συναρτήσεις f,g με:

- $f(x)=e^{x+1}-1$, $x\in\Re$ και
- $g(x)=\ln(x+1)-1$, $x>-1$.

Γ₂. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση και να βρείτε την αντίστροφη της. **Μονάδες 7**

Γ₃. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x-1}{f(x)}+\dfrac{x+2}{g(x^2)+1}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Μονάδες 6

Γ₄. Να βρείτε την τιμή του $\mu\in(-1,+\infty)$ ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[(\mu+1)\cdot\sqrt{x^2+1}+g(\mu)\cdot x]$ να είναι πραγματικός αριθμός. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται μία συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν :

(**1**) Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής συνάρτηση.

(**2**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{3}{5}}{x}=1+f(0)$.

(**3**) $\eta\mu(x-1)\le(x-1)f(x)\le\dfrac{x^2-1}{2}$, για κάθε $x\in\Re$.

Δ₁. Να δείξετε ότι $f(0)=\dfrac{3}{5}$ και $f(1)=1$. **Μονάδες 4x2=8**

Δ₂. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $5f(x_0)=4$. **Μονάδες 6**

Δ₃. Να δείξετε ότι $f'(0)=\dfrac{8}{5}$ και να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+\sigma\upsilon\nu x}{x^3\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)+5f'(0)\cdot x^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}}\dfrac{5f(x-\eta\mu x)-3}{(f^{-1}(x)-x_0)\left(x-\dfrac{4}{5}\right)}$ όπου $x_0\in(0,1)$ ο αριθμός του ερωτήματος Δ₂. **Μονάδες 2+5+4=11**

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες
Ευχόμαστε Επιτυχία!!!