

# ΦΑΣΜΑ GROUP

προπαρασκευή για  
Α.Ε.Ι. & Τ.Ε.Ι.

 [www.fasma.fro.gr](http://www.fasma.fro.gr)

25ης Μαρτίου 111  
25ης Μαρτίου 74  
Γραβιάς 85  
Πρωτεσιλάου 63

ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ  
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ  
ΚΗΠΟΥΠΟΛΗ  
ΙΛΙΟΝ

☎ 210 50 20 990&  
☎ 210 50 50 658&  
☎ 210 50 51 557&  
☎ 210 26 32 505&

210 50 27 990  
210 50 60 845  
210 50 56 296  
210 26 32 507

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
Καθηγητές: **ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**  
Τάξη: **Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
Ημερομηνία: **10 / 03 / 2018**  
Όνοματεπώνυμο: -----

## Θέμα Α

**A1.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $\Delta$ . Αν:  
Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ . **(Μονάδες 7)**

**A2.** Δίνονται οι προτάσεις:

- A. Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ .
- B. Υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$ .
- Γ. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ .
- Δ.  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ .
- E.  $f(\alpha) = f(\beta)$ .

Να επιλέξετε το ελάχιστο πλήθος από τις παραπάνω προτάσεις, έτσι ώστε οι πρώτες από αυτές να αποτελούν τις προϋποθέσεις και η τελευταία να είναι το συμπέρασμα ενός θεωρήματος. **(Μονάδες 5)**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2:

- α) έχουν μία ασύμπτωτη.
- β) έχουν δύο το πολύ ασύμπτωτες.
- γ) έχουν άπειρες ασύμπτωτες.
- δ) δεν έχουν ασύμπτωτες.

**(Μονάδες 3)**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx.$$

ii. Ισχύει  $\int_a^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^{\beta} + \int_a^{\beta} f'(x)g(x)dx$  όπου  $f', g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, \beta]$ .

iii. Το  $\int_a^{\beta} f(x)dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω απ' τον άξονα  $x'x$  μείον το άθροισμα των εμβαδών που βρίσκονται κάτω απ' τον άξονα  $x'x$ .

iv. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

v. Το μεγαλύτερο απ' τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. **(Μονάδες 5x2=10)**

### Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

**B1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 9)**

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(Μονάδες 8)**

**B3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο ορίζεται απ' τη γραφική παράσταση της  $f$  και την ευθεία  $y = -2x + 2$ . **(Μονάδες 8)**

### Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους:

$f(x) = x - x \ln x - 1$  για κάθε  $x > 0$  και  $g(x) = a^x - a \ln a \cdot x - 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  όπου  $a > 1$ .

**G1.** Να δείξετε ότι  $f(x) \leq 0$  για κάθε  $x > 0$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 1$ . **(Μονάδες 6)**

**G2.** Να μελετήσετε τη  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 6)**

**G3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες. **(Μονάδες 6)**

**G4.** Να βρείτε το σημείο  $A(x_0, f'(x_0))$  της γραφικής παράστασης της  $f'$  με  $x_0 \in (0, 1)$ , στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο μέγιστου εμβαδού. **(Μονάδες 7)**

### Θέμα Λ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2 + x}$  για κάθε  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$  και μία παράγουσα της  $F$  στο  $(-1, +\infty)$  με  $F(0) = 0$ . Επιπλέον δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $G : \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $\int_{-\frac{1}{2}}^2 (e^{G(x)-x} - G(x) + x) dx = \frac{5}{2}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  **(Μονάδες 5)**

**Δ2.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $D_f$  με σύνολο τιμών το  $f(D_f) = (0, +\infty)$ . **(Μονάδες 6)**

**Δ3.** Να δείξετε ότι  $G(x) = x$  για κάθε  $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ . **(Μονάδες 4)**

**Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $F$  στο  $O(0, F(0))$  είναι η  $y = x$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $F(|\eta\mu(F(x) - G(x))|) = F(|F(x) - G(x)|)$ . **(Μονάδες 5)**

**Δ5.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((f(x) + 1)^{\ln f(x)})$ . **(Μονάδες 5)**

**Διάρκεια Διαγωνίσματος: 3 ώρες.**

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**