Σύγχρονο

ΦΑΣΜΑ GROUP
προπαρασκευή για
Α.Ε.Ι. & Τ.Ε.Ι.

Μαθητικό Φροντιστήριο

www.fasma.fro.gr

25ης Μαρτίου 111	**ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ**	**☎ 210 50 20 990&**	**210 50 27 990**
25ης Μαρτίου 74	**ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ**	**☎ 210 50 50 658&**	**210 50 60 845**
Γραβιάς 85	**ΚΗΠΟΥΠΟΛΗ**	**☎ 210 50 51 557&**	**210 50 56 296**
Πρωτεσιλάου 63	**ΙΛΙΟΝ**	**☎ 210 26 32 505&**	**210 26 32 507**

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
Καθηγητές: **ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**
Τάξη: **Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ**
Ημερομηνία: **13 / 01 /2018**
Ονοματεπώνυμο: _

Θέμα Α

Α1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$.

(Μονάδες 6)

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: "Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ στο οποίο είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του τότε η παράγωγος της είναι θετική στο εσωτερικό του Δ."

α) Χαρακτηρίστε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.**(Μονάδες 2)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α).**(Μονάδες 3)**

Α3. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα του Rolle.**(Μονάδες 4)**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη* **Σωστό** *ή* **Λάθος** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

i. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x>0$.

ii. $(\sigma\varphi x)'=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{x\,|\,\eta\mu x=0\}$.

iii. Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$.

iv. Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή είναι $\upsilon(t_0)=S'(t_0)$.

v. Το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m,M]$ όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f.**(Μονάδες 5x2=10)**

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = e^{x-1}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$ και πεδία ορισμού $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = (0, +\infty)$ αντίστοιχα.

Β1.Να δείξετε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $e^{x-1} - \dfrac{1}{x} = 0$ με $x > 0$ είναι η $x_0 = 1$.**(Μονάδες 7)**

Β2. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.**(Μονάδες 7)**

Β3.Να δείξετε ότι η οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε μοναδικό σημείο Κ στο οποίο οι εφαπτόμενες τους είναι κάθετες.**(Μονάδες 7)**

Β4. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g σε ένα σημείο της $M\left(\xi, \dfrac{1}{\xi}\right)$ όπου $\xi > 0$. Αν Α, Β είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό και ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. **(Μονάδες 4)**

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1) \cup (1, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

(1) $f(x) = \dfrac{a \cdot x + 1}{x - 1} + \dfrac{1}{\ln x}$, για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ και a μία πραγματική σταθερά.

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Γ1.Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{\ln x}, & x \in (0,1) \cup (1, +\infty) \\ -1, & x = 0 \end{cases}$. **(Μονάδες 7)**

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $[0,1)$ και $(1, +\infty)$.**(Μονάδες 7)**

Γ3.Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -2018$ **(Μονάδες 7)**

Γ4.Έστω F μία παράγουσα της f στο $(1, +\infty)$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(F(x+1) - F(x)\right)$.

(Μονάδες 4)

Θέμα Δ

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

(1) $\left| \dfrac{xf(x) - \alpha\eta\mu\dfrac{x}{2}}{x} - \dfrac{yf(y) - \alpha\eta\mu\dfrac{y}{2}}{y} \right| \le (x-y)^2$,για κάθε $x, y > 0$ και α μία πραγματική σταθερά.

(2) $2f(0) = 1$

Επιπλέον η ευθεία ε με εξίσωση $y = -\dfrac{1}{4\pi}x + \dfrac{1}{2}$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2\pi$.

Δ1. Να δείξετε ότι :

i) η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{xf(x)-\alpha\eta\mu\dfrac{x}{2}}{x}$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.**(Μονάδες 5)**

ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu\dfrac{x}{2}}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ **(Μονάδες 5)**

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2016\pi,2018\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.**(Μονάδες 5)**

Δ3. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2\pi]$. **(Μονάδες 6)**

Δ4.Έστω F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(e^{F(0)}\right)=f\left(\frac{1}{F^2(0)+1}\right)$, όπου $F(0)\leq \ln 2\pi$.

Να βρείτε τη σχετική θέση για κάθε $x\in\mathbb{R}$ της γραφικής παράστασης της F και της εφαπτομένης που δέχεται αυτή στο σημείο $\mathrm{K}(0,F(0))$.**(Μονάδες 4)**

Διάρκεια Διαγωνίσματος: 3 ώρες.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ