Τάξη: Γ' Λυκείου
Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
Καθηγητές: Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Ημερομηνία: 4 Μαρτίου 2017
Όνομα:________________________
Επώνυμο:______________________
Βαθμός: ________________________

Θέμα Α

Α1: Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(Μονάδες 9)**

Α2: Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle. **(Μονάδες 6)**

Α3: Να χαρακτηρίσετε καθεμία απ'τις παρακάτω προτάσεις είτε ως Σωστή (Σ), είτε ως Λάθος (Λ).

α) Το μεγαλύτερο απ' τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.

β)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναιίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω απ' τον x΄x άξονα μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω απ' τον x΄x άξονα.

γ) Κρίσιμα σημεία μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν, καθώς και τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

δ) Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά ένα του βαθμού του παρονομαστή $Q(x)$, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

ε)Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής . Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

(Μονάδες 5x2=10)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln(e^x-1)-1$και πεδίο ορισμού $D_f=(0,+\infty)$.

Β1: Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. **(Μονάδες 6)**

Β2: Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . **(Μονάδες 5)**

Β3: Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f . **(Μονάδες 8)**

Β4: Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(e^x)=f^{-1}(1-x)$. **(Μονάδες 6)**

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f με $D_f = f(D_f) = [1,4]$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,4]$ και $g(x) = \ln x + 4x - 1$.

Γ1: Δείξτε ότι η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα. **(Μονάδες 4)**

Γ2: Να λυθεί η ανίσωση $\ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right) + 4x^2 \geq 4(x+2)$ **(Μονάδες 5)**

Γ3: Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [1,4]$ τέτοιο ώστε $\ln\left(\sqrt[4]{\dfrac{f(\xi)}{\xi}}\right) = \xi - f(\xi)$. **(Μονάδες 5)**

Γ4: Αν επιπλέον ισχύει $f(1) = 4f(4)$:

- **i.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,4): f'(x_0) = -f(4)$. **(Μονάδες 4)**
- **ii.** Να δείξετε ότι υπάρχει $a \in (1,4)$ τέτοιο ώστε $af(a)[f(a) + af'(a)] = 0$. **(Μονάδες 4)**
- **iii.** Να βρείτε τα $f(1)$ και $f(4)$. **(Μονάδες 3)**

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με f'' γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

(1) $f(2-x) + f(2+x) = 2f(2)$ για κάθε $x \in [-2,2]$

(2) $f(0) = f(4)$

(3) $f'(2) = -f'(4) = 1$

Δ1:

- **i.** Να βρείτε την κυρτότητα της f. **(Μονάδες 5)**
- **ii.** Να δείξετε ότι $f(x) \geq -x + f(0)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f(x) \geq x - 2 + f(2)$ για κάθε $x \in [1,2]$. **(Μονάδες 5)**

Δ2: Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι υπάρχει μία θέση τοπικού μεγίστου και μία θέση τοπικού ελαχίστου για την f . **(Μονάδες 5)**

Δ3: Αν $E(\Omega)$ το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f και την $y = f(2)$. Να δείξετε ότι:

- **i.** $E(\Omega) = 2\int_0^2 (f(2) - f(x))dx$ **(Μονάδες 5)**
- **ii.** $E(\Omega) < 2$ **(Μονάδες 5)**

Οδηγίες: Στο διαγώνισμα αναγράφουμε μόνο τα στοιχεία. Απαντάμε όλα τα θέματα στο τετράδιο προσομοίωσης ΦΑΣΜΑ, με μόνο μπλε ή μόνο μαύρο στυλό που δεν σβήνει, σχήματα και διαγράμματα μπορούν να γίνουν με μολύβι. **Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες = 180 λεπτά.**

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!