

ΣΥΓΧΡΟΝΟ

**ΦΑΣΜΑ**GROUP  
προπαρασκευή  
για  
**A.E.I. & T.E.I.**

ΜΑΘΗΤΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Οι λύσεις του διαγωνίσματος  
θα αναρτηθούν στο χώρο του  
φροντιστηρίου ακριβώς στο  
πέρας της εξέτασης!

Τάξη: Γ' Λυκείου

Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Καθηγητές: Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης

Ημερομηνία: 20 Νοεμβρίου 2016

Όνομα: \_\_\_\_\_

Επώνυμο: \_\_\_\_\_

Βαθμός: \_\_\_\_\_

**Θέμα Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $A$ , τότε είναι και συνεχής στο  $x_0$ . **(Μονάδες 8)**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ ; **(Μονάδες 4)**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής. **(Μονάδες 3)**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  έτσι

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

ii. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x)) = -\infty$ .

iv. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  δια μέσου μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

v. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\beta) > 0$  τότε είναι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . **(Μονάδες 10)**

**Θέμα Β**

Δίνεται η συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \eta\mu x + 1, & x > 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma, & x \leq 0 \end{cases}$$

**B1.** Να δείξετε ότι  $\gamma = 1$ . **(Μονάδες 6)**

Αν  $(\varepsilon): y = -2x$  είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(-1, f(-1))$  τότε:

**B2.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 0$ . **(Μονάδες 6)**

**B3.** Για τις τιμές των παραπάνω παραμέτρων να βρείτε:

i. την παράγωγο της  $f$  για  $x > 0$ . **(Μονάδες 5)**

ii. την παράγωγο της  $f$  για  $x < 0$ . **(Μονάδες 3)**

iii. την παράγωγο της  $f$  για  $x = 0$ . **(Μονάδες 5)**

**Θέμα Γ**

Έστω η γνησίως φθίνουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 3}{x} = -3$
- $2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)f(x) \leq x^2 - 1$  για κάθε  $x \in (0,1)$ .
- $h(x) = f(x) - \ln x - 3$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 3$  και  $f(1) = 2$ .

(Μονάδες 6)

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτησης  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,1]$  και αφού βρείτε το σύνολο τιμών της να αποδείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα.

(Μονάδες 8)

**Γ3.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = e^{f(x)-3}$  τέμνει την ευθεία  $y = x$  σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$ .

(Μονάδες 5)

**Γ4.** Αν επιπλέον  $f'(1) = -3e$  να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του γραφήματος της παραγώγου της συνάρτησης  $g$  με τετμημένη  $\xi \in (0,1)$  έτσι ώστε η εφαπτομένη της  $C_g$ , εκεί να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 6)

**Θέμα Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + f'(0) \cdot x) = f'(1) + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f(1)$
- $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f'(0) = -1$  και  $f'(1) = -2$ .

(Μονάδες 6)

**Δ2.** Να δείξετε ότι:

- η μοναδική ρίζα της συνάρτησης  $f$  είναι η  $x_0 = 0$ .
- $f(x) < 0$  για κάθε  $x > 0$ .

(Μονάδες 3)

(Μονάδες 3)

- Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\rho \in (0,1)$  έτσι ώστε  $\frac{f(\rho)}{\rho-1} + \frac{f(\rho+1)}{\rho} = 0$ .

(Μονάδες 4)

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\eta\mu(f(x)) - f^2(x)} \right)$

(Μονάδες 4)

**Δ4.** Να δείξετε ότι ορίζεται η  $f^{-1}$  και αν τη θεωρήσουμε παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της τότε να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_{f^{-1}}$  στο  $O(0,0)$ .

(Μονάδες 5)

**Οδηγίες:** Στο διαγώνισμα αναγράφουμε μόνο τα στοιχεία. Απαντάμε όλα τα θέματα στο τετράδιο προσομοίωσης ΦΑΣΜΑ, με μόνο μπλε ή μόνο μαύρο στυλό που δεν σβήνει, σχήματα και διαγράμματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

**Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες = 180 λεπτά.**

**Σας ευχόμαστε επιτυχία!**

Ο εγωισμός της νόησης του απείρου στις μηδενικές στιγμές του χρόνου καθιστά την αναζήτηση αέναα απροσδιόριστη άρα ελεύθερη.

