

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑ.Λ.

9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α. Απόλυτη συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , ονομάζεται το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού (ή του δείγματος) για τα οποία η μεταβλητή παίρνει την τιμή x_i .
- β. Σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, \kappa$, ονομάζεται ο λόγος της συχνότητας v_i της τιμής x_i προς το μέγεθος του δείγματος. Είναι δηλαδή $f_i = \frac{v_i}{v}$.

γ.
$$f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_\kappa}{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_\kappa}{v} = \frac{v}{v} = 1$$

- A2.** Μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

- A3.** α. Σωστό (Σ)
β. Λάθος (Λ)
γ. Λάθος (Λ)
δ. Σωστό (Σ)
ε. Λάθος (Λ)

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Επειδή οι όροι του δείγματος είναι 5 και η διάμεσος είναι 15, προκύπτει ότι $4a - 1 = 15 \Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$.

- B2.** Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{14 + 12 + 18 + 15 + 16}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

οπότε

$$S^2 = \frac{(15-14)^2 + (15-12)^2 + (15-15)^2 + (15-16)^2 + (15-18)^2}{5} =$$

$$= \frac{1+9+0+1+9}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

B3. Είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{15} \approx 0,13 = 13\%$.

Επειδή $13\% > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

B4. Στο αρχικό δείγμα έχουμε:

$$\bar{x} = 15 \quad \text{και} \quad s_x = 2$$

Στο νέο δείγμα έχουμε:

$$\bar{y} = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25 \quad \text{και}$$

$$s_y = |-2| \cdot 2 = 4$$

Οπότε

$$CV_y = \frac{4}{|-25|} = 0,16 = 16\%.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = 6x^2 - 6κx$

Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο

$M(1, f(x))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, θα έχουμε:

$$f'(1) = 0 \quad \text{οπότε}$$

$$6 - 6κ = 0 \Leftrightarrow 6(1 - κ) = 0 \Leftrightarrow κ = 1.$$

Γ2. Για $κ = 1$ η παράγωγος συνάρτησης της f γράφεται $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

$$\text{Είναι } f''(x) = 12x - 6$$

$$\text{Λύνουμε την εξίσωση } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

και έχουμε:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f''		-	+
f'		\nwarrow	\nearrow

τ.ελαχ.

Άρα για την τιμή $x = \frac{1}{2}$ ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Γ3. Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $A(-1, f'(-1))$, δηλαδή το $A(-1, 12)$.

- Είναι $f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18$
- Επειδή $f''(-1) = \alpha \Rightarrow \alpha = -18$

οπότε $y = -18x + \beta$

- Επειδή η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $A(-1, f'(-1))$ δηλαδή $A(-1, 12)$ έχουμε $12 = -18(-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι $y = -18x - 6$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 4} + 2018)' = \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}, x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	\ominus	$+$
f	\searrow	2020	\nearrow

Προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή 2020 στη θέση $x_0 = 0$.

Δ3. Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 2x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x^2 + 4} - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x^2 + 4} - 2)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2) \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4}^2 - 2^2}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = 0.\end{aligned}$$