

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, Σελ. 135 σχολικού βιβλίου.

A2. α. Ψ

β. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, διότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, ενώ

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$.

Άρα η f ενώ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

A3. Μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

A4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty) = A_f$$

$$g(x) = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) = A_g$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$ είναι:

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g, \text{ ώστε } g(x) \in A_f\} =$$

$$= \left\{ x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \text{ ώστε } \frac{x}{1-x} \in (0, +\infty) \right\} =$$

$$= \{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \text{ ώστε } x(1-x) > 0\} =$$

$$= \{x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \text{ ώστε } x \in (0, 1)\} = (0, 1).$$

Ο τύπος της συνάρτησης $f \circ g$ είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

B2. α) Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται αρκεί να δείξουμε ότι είναι 1-1. Ισοδύναμα:

Αν $h(x_1) = h(x_2)$ με $x_1, x_2 \in (0, 1)$ να δείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Πράγματι:

$$\text{Αν } h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)$$

Όμως η $f(x) = \ln x$ είναι 1-1, άρα προκύπτει

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}, \text{ άρα } x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1), \text{ ή}$$

$$x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2, \text{ ή } x_1 = x_2.$$

β) Αν $y = h(x) \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$

$$\text{Όμως } y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (1-x)e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow x + xe^y = e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Όμως } x \in (0, 1) \Leftrightarrow \frac{e^y}{1+e^y} \in (0, 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{e^y+1} < 1 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Έτσι } h^{-1}(y) = \frac{e^y}{1+e^y}, \quad y \in \mathbb{R}, \text{ ή } h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

B3 Είναι $\varphi'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = \frac{(e^x)'(e^x+1) - e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} =$

$$= \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} και δεν έχει ακρότατα.

$$\text{Είναι } \varphi''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot (e^x+1)^2 - e^x [(e^x+1)^2]'}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x [2(e^x+1)] \cdot (e^x+1)'}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(e^x+1) \cdot [e^x+1-2 \cdot e^x]}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x \cdot (1-e^x)}{(e^x+1)^3} =$$

$$= -\frac{e^x \cdot (e^x-1)}{(e^x+1)^3}.$$

Είναι $\frac{e^x}{(1+e^x)^3} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow -(e^x - 1) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$

$\varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow -(e^x - 1) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$.

Η φ στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(-\infty, 0]$, στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $x_0 = 0$.

- B4** Οι οριζόντιες ασύμπτωτες της φ , αν υπάρχουν, προκύπτουν από τα: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$,
β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$

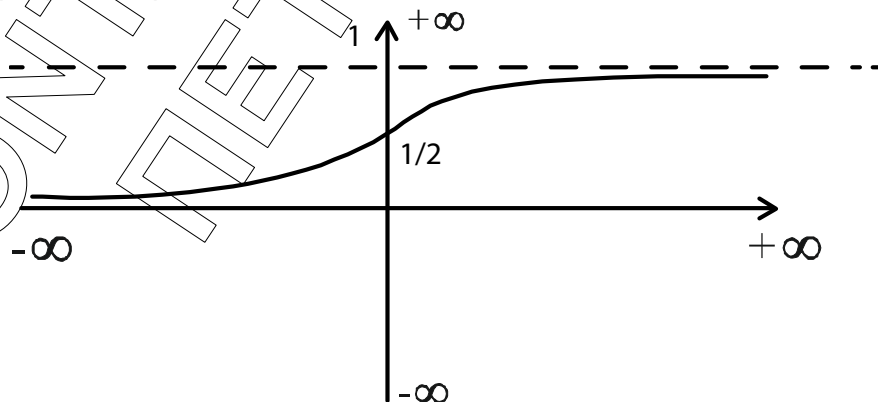
$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια της φ στο $+\infty$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x+1)} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y=0$ (άξονα $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της φ στο $-\infty$.

Γραφική παρασταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = -\sin x$, $x \in [0, \pi]$

Έστω $M(x_0, y_0)$ σημείο επαφής με $x_0 \in [0, \pi]$, τότε η εφαπτομένη στο M είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$A \in (\varepsilon): y_A - f(x_0) = f'(x_0)(x_A - x_0)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sin x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0 \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\frac{\pi}{2} \sin x_0 + x_0 \sin x_0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + \frac{\pi}{2} \sin x_0 - x_0 \sin x_0 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση K , με

$$K(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \frac{\pi}{2} \sin x - x \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$K'(x) = \sin x - \frac{\pi}{2} \eta\mu x - (\sin x - x \eta\mu x)$$

$$= x \eta\mu x - \frac{\pi}{2} \eta\mu x = \eta\mu x \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$K'(x) = \eta\mu x \left(x - \frac{\pi}{2} \right), \quad x \in [0, \pi]$$

Επειδή $\eta\mu x > 0$ για $x \in (0, \pi)$,

ενώ $x - \frac{\pi}{2} < 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$

$x - \frac{\pi}{2} > 0$ για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$,

προκύπτει ο εξής πίνακας μεταβολών για την K :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$K'(x)$		\circ	
		$-$	$+$
$K(x)$	0	\min	0

$$\text{με } K\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0.$$

Προκύπτει ότι η $K(x)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[1 - \frac{\pi}{2}, 0 \right]$, ενώ μηδενίζεται

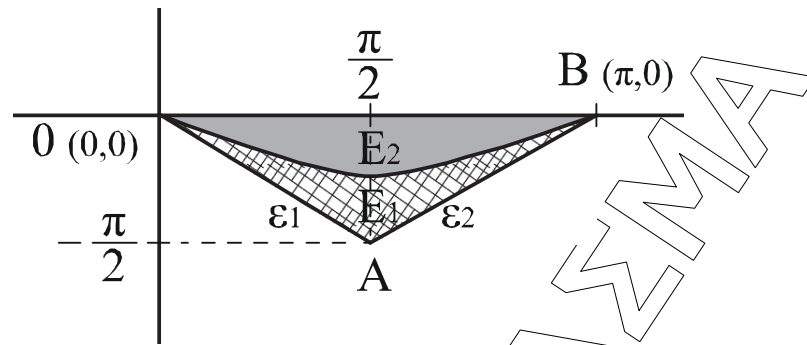
μόνο στα σημεία $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.

Δηλαδή υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτόμενες που άγονται από το A :

$$\text{Για } x_1 = 0: y + \eta\mu 0 = -\sin 0(x - 0) \Leftrightarrow y = -x \quad (\varepsilon_1)$$

$$\text{Για } x_2 = \pi: y + \eta\mu \pi = -\sin \pi(x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi \quad (\varepsilon_2)$$

Γ2



Επειδή $f(x) \leq 0$ για $x \in [0, \pi]$ είναι

$$\begin{aligned} E_2 &= -\int_0^{\pi} f(x) dx = -\int_0^{\pi} -\eta\mu x dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = \\ &= [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -(\sigma\upsilon\nu \pi - \sigma\upsilon\nu 0) = \\ &= -(-1 - 1) = 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB ισούται με

$$\frac{1}{2} \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$E_1 = (\hat{OAB}) - E_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Άρα } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2 - 4}{8}$$

Γ3. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (f(x) + x) = -\eta\mu \pi + \pi = \pi > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (f(x) - x + \pi) \neq 0$$

f κυρτή στο διάστημα $[0, \pi] \Rightarrow f(x) > x - \pi$, για $x \in (0, \pi)$
 $\Rightarrow f(x) - x + \pi > 0$ για $x \in (0, \pi)$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = +\infty$$

Γ4. Από το σχήμα του ερωτήματος Γ2 προκύπτει ότι αφού η f είναι κυρτή στο $[1, e] \subset [0, \pi]$, θα είναι "πάνω" από κάθε εφαπτομένη της. Άρα, $f(x) > x - \pi$ για κάθε

$$x \in [1, e] \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}, \quad x \in [1, e]$$

$$\text{Άρα } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi [\ln x]_1^e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e-1 - \pi(\ln e - \ln 1) \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e-1 - \pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Στο διάστημα $[-1, 0)$ η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

β) Στο διάστημα $(0, \pi]$ η f είναι επίσης συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

γ) Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x = 0$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \eta \mu x) = 0 = f(0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$, επομένως συνεχής και στο $[-1, \pi]$.

$$\text{Για } -1 < x < 0: f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{(-x)^4} = (-x)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} > 0$$

$$\text{Για } 0 < x < \pi: f(x) = e^x \eta \mu x \Rightarrow f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$$

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{|x|^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt[3]{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sqrt[3]{-x}}{x} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, άρα το σημείο $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο.

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}, & -1 < x < 0 \\ e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Είναι προφανώς $f'(x) < 0$ στο $(-1, 0)$.

$$\text{Για } 0 < x < \pi \text{ είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 0 \Leftrightarrow \epsilon \rho x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ αφού}$$

$$x \in (0, \pi).$$

$$\text{Άρα κρίσιμα σημεία τα } x=0, x = \frac{3\pi}{4}.$$

Δ2 Η συνάρτηση $\varphi(x) = \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$ αφού είναι συνεχής και μηδενίζεται μόνο στο

$x = \frac{3\pi}{4}$ άρα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\text{Έτσι, για } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0 \text{ στο } \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\text{και για } x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0 \Rightarrow \varphi(x) < 0 \text{ στο } \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right).$$

Άρα, το πρόσημο της f' και οι μεταβολές της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
f'	▨	-	+	-
f	▨	T.M.	T.E.	T.M.
			T.M.	T.E.

Έτσι, η f είναι γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ και γν. φθίνουσα στο $(-1, 0], \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία $x = -1$ και $x = \frac{3\pi}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στα $x = 0$ και $x = \pi$.

Είναι $f(-1) = 1, f(0) = 0, f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}, f(\pi) = 0$.

Αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το κλειστό διάστημα $[-1, \pi]$, τότε το σύνολο

τιμών θα είναι το $f([-1, \pi]) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Δ3. Στο $[0, \pi]$ είναι $g(x) - f(x) = e^{5x} - e^x \eta \mu x = e^x (e^{4x} - \eta \mu x)$.

Όμως, για $x \geq 0$ είναι

$$e^{4x} \geq 1 \quad (\text{η ισότητα ισχύει για } x = 0)$$

και $\eta \mu x \leq 1$ (η ισότητα ισχύει για $x = \frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow e^{4x} - \eta \mu x > 0 \Rightarrow g(x) - f(x) > 0.$$

Άρα,

$$E = \int_0^\pi (g(x) - f(x)) dx = \int_0^\pi (e^{5x} - e^x \eta \mu x) dx =$$

$$= \int_0^\pi e^{5x} dx - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx =$$

$$= \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx.$$

Είναι

$$I = \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = \int_0^\pi (e^x)' \eta \mu x dx = [e^x \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sigma \upsilon \nu x dx =$$

$$= - \int_0^\pi (e^x)' \sigma \upsilon \nu x dx = - [e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = e^\pi + 1 - I$$

$$\text{Άρα, ισχύει } 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$\text{Άρα, } E = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

Δ4 **Α' Τρόπος**

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16f(x) - 16\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \quad (1)$$

- Η $x = \frac{3\pi}{4}$ προφανής ρίζα της εξίσωσης.

- Για $x \neq \frac{3\pi}{4}$, επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$ έχουμε:

$$f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \quad (2)$$

$$\text{Όμως, } \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 < \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \text{ αφού } x \neq \frac{3\pi}{4} \quad (3)$$

$$\text{Από (2), (3)} \Rightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

Άρα η (1) είναι αδύνατη. Επομένως, μοναδική ρίζα είναι η $x = \frac{3\pi}{4}$.

Β' Τρόπος

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$16f(x) - 16\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Όμως, το } \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f_{\max} \text{ στο διάστημα } [0, \pi]$$

$$\text{Άρα, } f_{\max} = f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$$

Και επειδή $f_{\max} \geq f(x)$ για $x \in [0, \pi]$ είναι

$$f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq f(x), \quad x \in [0, \pi]$$

$$\text{Άρα, } \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - \frac{3\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}.$$