<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι</u>

ΕΠΑ.Λ. Α΄ & Β΄

3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ 138 σχολικού βιβλίου.

Α2. α → Σ, β → Λ, γ → Λ, δ → Λ, ε → Σ.

Α3. **α)** $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} \text{συν}x \, \mathrm{dx} = \text{ημ}\beta - \text{ημ}\alpha$

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell, \ \ell \in R,$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:
$xf(x) - 2f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)f(x) = x^2 - 4$.

Για $x \neq 2$ προκύπτει $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Β2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 2+2 = 4$.

Β3. Επειδή η f είναι συνεχής το $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$. Έτσι πρέπει:

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = f(2) \Leftrightarrow f(2) = 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Α/Α	**Ηλικίες υπαλλήλων**	**Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i**	**Κέντρο κλάσης x_i**	**$x_i \nu_i$**	**Σχετική συχνότητα f_i %**
1η κλάση	[25, 35)	100	**30**	**3.000**	**50**
2η κλάση	[35, 45)	50	**40**	**2.000**	**25**
3η κλάση	[45, 55)	40	**50**	**2.000**	**20**
4η κλάση	[55, 65)	10	**60**	**600**	**5**
ΣΥΝΟΛΑ		ν = 200		**7.600**	**100**

Γ2. Η μέση ηλικία των υπαλλήλων είναι

$$\overline{x} = \frac{3000+2000+2000+300}{200} = \frac{7600}{200} = 38.$$

Γ3. Το ποσοστό των υπαλλήλων με ηλικία τουλάχιστον 45 ετών είναι: 20 + 5 = 25%.

Γ4. Μετά τις μετακινήσεις των υπαλλήλων προκύπτει ο επόμενος πίνακας

Α/Α	**Ηλικίες υπαλλήλων**	**Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i**	**Κέντρο κλάσης x_i**	**$x_i \nu_i$**	**Σχετική συχνότητα f_i %**
1η κλάση	[25, 35)	110	**30**	**3.300**	**50**
2η κλάση	[35, 45)	45	**40**	**1.800**	**25**
3η κλάση	[45, 55)	40	**50**	**2.000**	**20**
4η κλάση	[55, 65)	5	**60**	**300**	**5**
ΣΥΝΟΛΑ		ν = 200		**7.400**	**100**

Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\overline{y} = \frac{110\cdot 30+45\cdot 40+40\cdot 50+5\cdot 60}{200} = \frac{7400}{200} = 37\,.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα αντίστοιχα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι:

$$f\,'(x)=\left[e^{x}\cdot(x-1)\right]'=\left(e^{x}\right)'(x-1)+e^{x}(x-1)'=e^{x}\cdot(x-1)+e^{x}=f(x)+e^{x},\ x\in R.$$

Δ2. Είναι

$$f\,'(x)=e^{x}(x-1)+e^{x}=e^{x}x-e^{x}+e^{x}=x\cdot e^{x},\ x\in R.$$

Είναι:

$f\,'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot e^{x}=0 \Leftrightarrow x=0,$ αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in R$.

$f\,'(x) \Leftrightarrow e^{x}\cdot x=0 \Leftrightarrow x>0,$ αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in R$.

$f\,'(x) \Leftrightarrow e^{x}\cdot x<0 \Leftrightarrow x<0,$ αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in R$.

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄	-	0	+
f	↘		↗

τ. min
f(0) = -1

Επομένως:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x=0$, το $f(0)=-1$.

Δ3. Μελετάμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$g(x)=f(x)+e^{x}=e^{x}(x-1)+e^{x}=xe^{x}-e^{x}+e^{x}=xe^{x},\ x\in R.$$

Παρατηρούμε ότι $g(x)=f\,'(x)$, $x\in R$.

Έτσι:

$g(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}\cdot x=0 \Leftrightarrow x=0,$ αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in R$.

$g(x)>0 \Leftrightarrow e^{x}\cdot x=0 \Leftrightarrow x>0,$ αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in R$.

$g(x)<0 \Leftrightarrow e^{x}\cdot x<0 \Leftrightarrow x<0,$ αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in R$.

Έτσι έχουμε ότι:

$g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$ και $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E=-\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{dx}+\int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{dx}=-\int_{-1}^{0} xe^{x}\,\mathrm{dx}+\int_{0}^{1} xe^{x}\,\mathrm{dx}=$$

$$=-\int_{-1}^{0} x(e^{x})'\,\mathrm{dx}+\int_{0}^{1} x(e^{x})'\,\mathrm{dx}=-\left[xe^{x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0} e^{x}\,\mathrm{dx}+\left[xe^{x}\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1} e^{x}\,\mathrm{dx}=$$

$$=-\left[xe^{x}\right]_{-1}^{0}+\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}+\left[xe^{x}\right]_{0}^{1}-\left[e^{x}\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\left[0+e^{-1}\right]+\left[e^{0}-e^{-1}\right]+\left[e^{1}-0\right]-\left[e^{1}-e^{0}\right]=$$

$$=-\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}+e-e+1=2-\frac{2}{e}\quad \text{τ.μ.}$$