

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)  
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη (σελ.93 σχολικού βιβλίου).

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} - \frac{n\bar{x}}{n} = \frac{\bar{x}}{n} - \frac{\bar{x}}{n} = 0.$$

A2. Ορισμός (Σχολικό σελ 16)

Γενικά μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής, αν για κάθε  $x_0 \in A$

ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

A3.

- α. Λάθος
- β. Σωστό
- γ. Σωστό
- δ. Σωστό
- ε. Λάθος

A4.

α.  $(c)' = 0$

β.  $(x^2)' = 2x$

## ΘΕΜΑ Β

| Πλήθος<br>ωρών<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | $f_i$ | Σχετική<br>Συχνότητα<br>$f_i\%$ | Αθροιστική<br>Συχνότητα<br>$N_i$ | $x_i \cdot v_i$ |
|-------------------------|--------------------|-------|---------------------------------|----------------------------------|-----------------|
| 0                       | 10                 | 0,20  | 20                              | 10                               | 0               |
| 1                       | 15                 | 0,30  | 30                              | 25                               | 15              |
| 2                       | 11                 | 0,22  | 22                              | 36                               | 22              |
| 3                       | 8                  | 0,16  | 16                              | 44                               | 24              |
| 4                       | 6                  | 0,12  | 12                              | 50                               | 24              |
| Σύνολο                  | 50                 | 1     | 100                             |                                  | 85              |

**B1.**  $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow v_1 = 50 - 40 = 10$

**B2.**  $\bar{x} = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i = \frac{1}{50} \cdot 85 = \frac{170}{100}$  Άρα  $\bar{x} = 1,7$

**B3.** Αφού το πλήθος είναι άρτιος αριθμός η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμά των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$$\frac{v}{2} = \frac{50}{2} = 25^{\text{η}}$$

$$\frac{v}{2} + 1 = 25 + 1 = 26^{\text{η}}$$

Έτσι:  $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta = 1,5$

**B4.** α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες είναι:

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20 + 30 + 22 + 16 = 88\%$$

β) Έστω  $y_i$  οι νέες ώρες

$$y_i = x_i + 4, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

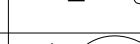
οπότε:  $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 \Leftrightarrow \bar{y} = 5,7$

### ΘΕΜΑ Γ

Έχω  $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + a$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.**  $f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 + a)' = -6x^2 + 12x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

| $x$     | $-\infty$ | 1                                                                                 | 2 | $+\infty$ |                                                                                    |
|---------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ | -         | ○                                                                                 | + | ○         | -                                                                                  |
| $f$     |           |  |   |           |  |

Για  $x \in (-\infty, 0]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Για  $x \in [0, 2]$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Για  $x \in (2, +\infty]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Γ2.** Στο  $x_1 = 0$  η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο το  $f(0) = a$

Στο  $x_2 = 2$  η  $f$  έχει τοπικό μέγιστο το  $f(2) = a + 8$

$$\text{Αφού } \frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{a + a + 8}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{2a + 8}{2} = -8 \Leftrightarrow a + 4 = -8 \Leftrightarrow a = -12$$

**Γ3.** Έστω  $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$  η εξίσωση της εφαπτομένης, τότε ισχύει:

$$\lambda = f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 \Rightarrow \lambda = 6$$

$$\text{Έτσι έχω } \varepsilon: y = 6x + \beta$$

$$\text{Αφού } M(1, f(1)) \in C_f \text{ ισχύει } f(1) = 6 \cdot 1 + \beta \Rightarrow -8 = 6 + \beta \Rightarrow \beta = -14$$

$$\text{Επομένως } \varepsilon: y = 6x - 14.$$

**Γ4.** Για  $x \in [2, +\infty)$  έχω  $f$  γνησίως φθίνουσα, έτσι

$$\text{για } x \geq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(2) \Rightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Rightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0.$$

### ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$$

$$\Delta 1. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

$$\text{Άρα: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7$$

$$f''(x) = 2x - 8$$

$$\Delta 2. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36$$

$$\text{Άρα } x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2}. \text{ Επομένως } x_1 = \frac{8+6}{2} = 7 \text{ και } x_2 = \frac{8-6}{2} = 1.$$

| $x$            | $-\infty$ | 1 | 7 | $+\infty$ |   |
|----------------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x^2 - 8x + 7$ | +         | ○ | - | ○         | + |
| $f'(x)$        | +         | ○ | - | ○         | + |
| $f$            |           | ↗ | ↘ | ↗         |   |

Για  $x \in (-\infty, 1]$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Για  $x \in [1, 7]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Για  $x \in [7, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Δ3.**

Έχω  $2020, 2025 \in [7, +\infty)$  με

$$2020 < 2025 \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$$

$$\text{Έχω } \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1, 7] \text{ με } \frac{3}{2} < \frac{5}{2} \stackrel{f \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

$$\text{Οπότε: } A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$$

**Δ4.** Έχω  $f''(x) = 2x - 7$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1 - \sqrt{3}^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1 - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = (2-8) \cdot (\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) = -6 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -6 \cdot 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3}. \end{aligned}$$