ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 186

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 76

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 161

Α4. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2ax + 9$

Αφού f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$, από θεώρημα Fermat πρέπει:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$

Για $\alpha = -6$ έχω $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Β2. Για:

$a = 6 : f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$x_1 = 3$

$x_2 = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$x < 1$

ή

$x > 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗

Έστω :

$A_1 = (-\infty, 1)$

$A_2 = [1, 3]$

$A_3 = (3, +\infty)$

$f\left((0,1)\right) \xrightarrow{f \text{ αύξουσα}} \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-3, 1)$

Αφού $0 \in f\left((0,1)\right)$ και f αύξουσα στο (0, 1) υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_1 \in (0,1)$ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$f(\mathrm{A}_2) = f\left([1,3]\right) \xrightarrow{f \text{ φθίνουσα}} \left(f(3), f(1)\right) = [-3, 1]$

Αφού $0 \in f([1,3])$ και f φθίνουσα στο [1,3] υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_2 \in [1,3]$ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$f(\mathrm{A}_3) = f((3,+\infty)) \xrightarrow{f \text{ αύξουσα}} \left(\lim_{x\to 3^+} f_{(x)}, \lim_{x\to+\infty} f_{(x)}\right) = (-3, +\infty)$

Αφού $0 \in f(A_3)$ και f φθίνουσα στο A3 υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_3 \in (3, +\infty)$ της $f(x) = 0$.

Αφού $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in [1,3]$ και $x_3 \in (3,+\infty)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 θετικές ρίζες.

B3. $f''(x) = \left(3x^2 - 12x + 9\right)' = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	∩		∪

f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

f κυρτή στο $[2, +\infty)$

σ.κ. της C_f είναι το $\Sigma\big((2, f(2))\big) = \boxed{\Sigma(2,-1)}$

B4. Ισχύει $g(x) = x + f(x)$ (1), $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = 1 + f'(x)$ (2), $x \in \mathbb{R}$.

Αν ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο $A\big(\xi, f(\xi)\big)$ τότε

ε_1: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ ή ε_1: $y = f'(\xi)\cdot x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$

Αν ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο $B\big(\xi, g(\xi)\big)$ τότε

ε_2: $y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$ ή ε_2: $y = g'(\xi)\cdot x + g(\xi) - \xi g'(\xi)$

Τα σημεία τομής των ε_1 και ε_2 προκύπτουν από την εξίσωση:

$$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = g'(\xi)x + g(\xi) - \xi g'(\xi) \Rightarrow$$

$$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = \big(1 + f'(\xi)\big)x + \xi + f(\xi) - \xi\cdot\big(1 + f'(\xi)\big)$$

$$\cancel{f'(\xi)}x + \cancel{f(\xi)} - \xi\,\cancel{f'(\xi)} = x + \cancel{f'(\xi)}x + \cancel{\xi} + \cancel{f(\xi)} - \cancel{\xi} - \xi\,\cancel{f'(\xi)}$$

$x = 0$

Άρα ε_1, ε_2 τέμνονται στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(e^x \cdot \eta\mu x) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2 + x} = 0$$

$f(0) = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - \mathrm{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\Big(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\Big) = e^0\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - \mathrm{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2\cdot(1 + \frac{1}{x})}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \overset{\substack{x\to 0^+ \\ |x| = x}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ2. Η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

Η f συνεχής στο $x_0=0$.

Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\cdot \eta\mu x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=0\cdot 0=0=\lambda\in\mathbb{R}$$

γιατί: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)=0=\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{1}{x}\right|$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\cancel{\lambda}^{=0}\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=0=\beta\in\mathbb{R}$$

γιατί: $-1\le\eta\mu x\le 1\overset{\cdot e^x>0}{\Leftrightarrow}-e^x\le e^x\cdot\eta\mu x\le e^x$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=0=\lim_{x\to-\infty}e^x$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=0$

Η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\overset{\substack{x\to+\infty\\ |x|=x}}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=\sqrt{1+0}=1=\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\cancel{\lambda}^{=1}\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}\overset{\substack{x\to+\infty\\ |x|=x}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=$$

$$=\frac{1}{2}=\beta\in\mathbb{R}.$$

Η ευθεία $y=x+\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ3. Έστω $g(x) = f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{x} \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2}$

- Η g συνεχής στο $[-\pi,\ 0]$ ως πράξεις συνεχών.

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^{0} \cdot \eta\mu(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

- $g(-\pi) \cdot g(0) < 0$

Από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi,\ 0)$.

Γ4. $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $x(t) \geq 0$ και $x'(t) > 0$

$$y'(t) = \frac{2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Για $t = t_0$: $y'(t_0) = \dfrac{2 \cdot x(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \overset{y'(t_0) = x'(t_0)}{\Longleftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow x'(t_0) = \frac{x'(t_0) \cdot [2 \cdot x(t_0) + 1]}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \overset{x'(t_0) > 0}{\Longleftrightarrow} 1 = \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2 \cdot x(t_0) + 1$$

Άρα $4 \cdot \left[x^2(t_0) + x(t_0)\right] = [2 \cdot x(t_0) + 1]^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \cdot x^2(t_0) + 4 \cdot x(t_0) = 4 \cdot x^2(t_0) + 4 \cdot x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ <u>Αδύνατη</u>

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του Μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $x\cdot f(x)=2\cdot F(x)\cdot \ln x \Leftrightarrow$

- $x\cdot F'(x)=2\cdot F(x)\cdot \ln x \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} F'(x)=2\cdot F(x)\cdot \dfrac{\ln x}{x}$ (1)
- $\left(x^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln x^{\ln x}}\right)'=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}\cdot\left(\ln^2 x\right)'=x^{\ln x}\cdot 2\cdot \ln x\cdot\dfrac{1}{x}$
- $1\cdot f(1)=2\cdot F(1)\cdot \overset{0}{\cancel{\ln 1}} \Leftrightarrow f(1)=0$ και $f'(1)=2$

Η $g(x)=\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Η $g(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$g'(x)=\frac{F'(x)\cdot x^{\ln x}-F(x)\cdot\left(x^{\ln x}\right)'}{\left(x^{\ln x}\right)^2}=\frac{F'(x)\cdot x^{\ln x}-F(x)\cdot x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}}{\left(x^{\ln x}\right)^2}=$$

$$=\frac{x^{\ln x}\cdot\left(F'(x)-F(x)\cdot\dfrac{2\ln x}{x}\right)}{\left(x^{\ln x}\right)^2}\overset{(1)}{=}0$$

Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή, δηλαδή $g(x)=\mathrm{c},\ \mathrm{c}\in\mathbb{R}$

Δ2.

I. $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)\cdot(x-1)}{\ln x\cdot(x-1)}=\lim_{x\to1}[\dfrac{f(x)}{x-1}\cdot\dfrac{x-1}{\ln x}]$

γιατί: $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-\mathrm{f}(1)}{x-1}=f'(1)=2$

II. Για x=1: $g(1)=c\Leftrightarrow\dfrac{F(1)}{1^{\ln 1}}=c\Leftrightarrow c=F(1)$

Η F συνεχής στο x=1 άρα

$F(1)=\lim_{x\to1}F(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{x\cdot f(x)}{2\cdot\ln x}=\lim_{x\to1}[\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{f(x)}{\ln x}]=\dfrac{1}{2}\cdot2=1$

Άρα c=1 οπότε $\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}=1\Leftrightarrow F(x)=x^{\ln x}$.

Δ3. $F'(x) = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \dfrac{\ln x}{x}$

$F'(x) = 0 \overset{x^{\ln x} \neq 0}{\Longleftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$

$F'(x) > 0 \underset{x>0}{\overset{x^{\ln x}>0}{\Longleftrightarrow}} \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \overset{\ln x \text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x > 1$

x	0 1 +∞	
$F'(x)$	−	+
$F(x)$	↘	↗

Η F γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Η F γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η F έχει ελάχιστο το $F(1)=1$.

- Αν $0 < x^2 < x \leq 1 \overset{F \text{ γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x)$

Άρα $F(x) - F(x^2) < 0$

- Αν $1 \leq x < x^2 \overset{F \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} F(x) < F(x^2)$

Άρα $F(x) - F(x^2) < 0$

Η εξίσωση γίνεται :
$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) = (x-1)^2$

Ισχύει $F(x) - F(x^2) < 0$ για κάθε $x \neq 1$
$(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$

Άρα η εξίσωση είναι **Αδύνατη** για κάθε $x \neq 1$.
Το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης οπότε είναι μοναδική στο $(0, +\infty)$.

Δ4. $E = \int_1^e |F(x)| \mathrm{dx}$ με $F(x) > 0, \forall x \in [1,e]$

Άρα $E = \int_1^e F(x)\mathrm{dx} = \int_1^e x^{\ln x}\mathrm{dx} = \int_1^e \left(e^{\ln x^{\ln x}}\right)\mathrm{dx} = \int_1^e e^{\ln^2 x}\mathrm{dx}$

Από την ανισότητα $e^x \geq x+1$ αν βάλουμε όπου το x το $\ln^2 x$ προκύπτει $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα $\int_1^e e^{\ln^2 x}\mathrm{dx} > \int_1^e \left(\ln^2 x + 1\right)\mathrm{dx}$

$$\int_1^e \left(\ln^2 x + 1\right)\mathrm{dx} = \underbrace{\int_1^e \ln^2 x\mathrm{dx}}_{\mathrm{A}} + \underbrace{\int_1^e 1\mathrm{dx}}_{\mathrm{B}}$$

- $B = \int_1^e 1\mathrm{dx} = \left[x\right]_1^e = e - 1$
- $A = \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x\mathrm{dx} = \left[x \cdot \ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e x \cdot \left(\ln^2 x\right)' \mathrm{dx} =$

$$= e \cdot \cancel{\ln^2 e}^{1} - 1 \cdot \cancel{\ln^2 1}^{0} - \int_1^e \cancel{x} \cdot \frac{2 \cdot \ln x}{\cancel{x}}\mathrm{dx} =$$

$$= e - 2 \cdot \int_1^e (x)' \cdot \ln x\mathrm{dx} = e - 2 \cdot \left\{\left[x \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)'\mathrm{dx}\right\}$$

$$= e - 2 \cdot \left\{e \cdot \cancel{\ln}^{1} e - 1 \cdot \cancel{\ln}^{0} 1 - \int_1^e \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\mathrm{dx}\right\} =$$

$$= e - 2 \cdot e + 2 \cdot \left[x\right]_1^e = -e + 2 \cdot (e - 1) = -e + 2 \cdot e - 2 = e - 2$$

Άρα $\int_1^e e^{\ln^2 x}\mathrm{dx} = e - 2 + e - 1 = 2 \cdot e - 3$

Άρα $E > 2 \cdot e - 3$.