ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 76

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 155

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 216

Α4. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

$$g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}},\qquad x\geq 1$$

$$h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}},\qquad x\geq 1$$

Β1. $$f(x)=\left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=$$

$$=\frac{\frac{x+1}{\cancel{\sqrt{x}}}}{\frac{x-1}{\cancel{\sqrt{x}}}}=\frac{x+1}{x-1},\qquad x>1\quad\left(x\in D_g\bigcap D_h-\{x\,|\,h(x)=0\}\right)$$

$$r(x)=g(x)h(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x},\qquad x\geq 1\quad\left(x\in D_g\bigcap D_h\right)$$

Β2. Έστω $x_1,\ x_2\in(1,+\infty)$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1}\Leftrightarrow(x_1+1)\cdot(x_2-1)=(x_1-1)\cdot(x_2+1)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow f_{1-1} \Rightarrow \exists\, f^{-1}$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x+1 \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow (y-1)x = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$

Πρέπει $y \neq 1$ και

$$\frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1},\ \ x > 1$,

οπότε $f(x) = f^{-1}(x) \quad \forall\ x > 1$

Άρα $f = f^{-1}$

B3. $r(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$

<u>Κατακόρυφη Ασύμπτωτη</u>

Η $r(x)$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

<u>Πλάγια Ασύμπτωτη</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (r(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Άρα η ευθεία δ: y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της r(x) καθώς $x \to +\infty$

B4.

Πρέπει:

- $x \in D_{f^{-1}}: \ x > 1$
- $f(x) \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} > 1 \overset{x-1>0}{\Leftrightarrow} x+1 > x-1 \Leftrightarrow 1 > -1$ που ισχύει
- $x \in D_r \Leftrightarrow x \geq 1$

Επομένως x>1.

$$(f^{-1}(f(x))^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 1 + 4(x - \frac{1}{x}) \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow$$
$$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow$$
$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-4)(x^2-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 1, \ \textit{απορρίπτεται} \\ x = -1, \textit{απορρίπτεται} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+4+e^{\lambda}) = \cancel{-4}\,\cancel{+4} + e^{\lambda} = e^{\lambda}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda) = 4-3+\lambda = 1+\lambda$
- $f(2) = 1+\lambda$

Άρα $e^{\lambda} = \lambda + 1$

Έχει προφανή ρίζα $\lambda = 0$

Θεωρώ $g(\lambda) = e^{\lambda} - \lambda - 1$

$g'(\lambda) = e^{\lambda} - 1$

$g'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\lambda} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$

λ		0	
$g'(\lambda)$	−		+
$g(\lambda)$	↘	min = 0	↗

$\forall \lambda \neq 0$ είναι $g(\lambda) > 0$.

Άρα μοναδική ρίζα $\boxed{\lambda = 0}$

Γ2. Για $0 \leq x < 2$ έχω

$f'(x) = -2 < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2)$

Για $x \geq 2$ έχω:

$f'(x) = -2x + 4 < 0 \ \ \forall x > 2 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Στο $x_0 = 0$ η f έχει ολικό μέγιστο το $f(0) = 5$.

Γ3.

(i) Η f συνεχής στο $[0,3] \subseteq [0, +\infty)$

Η f παρ/μη στο $[0,2)$ και $(2, 3]$

Στο $x_0 = 2$ έχω:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2x + 4 + e^{\lambda} - 1 - \lambda}{x-2} \overset{(\lambda=0)}{=} \lim_{x \to 2^-} \frac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

και

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = 0$$

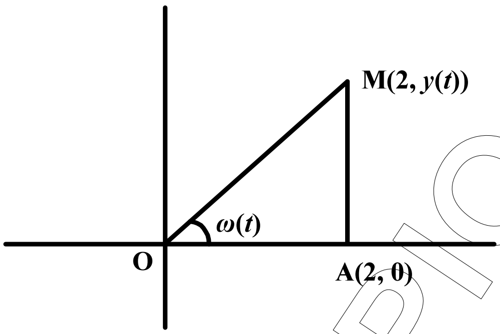
Άρα $\nexists f'(2)$. Άρα δεν εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο $[0,3]$.

(ii) Ψάχνω να βρω αν $\exists \xi \in (0,3):\ f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}$

Για $\xi \in (0,2)$ πρέπει $-2=\dfrac{0-5}{3}$ άτοπο

Για $\xi \in (0,3)$ πρέπει $-2\xi+4=-\dfrac{5}{3} \Rightarrow 2\xi = 4+\dfrac{5}{3} \Rightarrow 2\xi=\dfrac{17}{3} \Rightarrow \xi=\dfrac{17}{6}$.

Γ4.



$y'(t)=\dfrac{1}{2}$

$y(t_0)=f(2)=1$

$$\varepsilon\varphi(\omega(t))=\frac{y(t)}{2} \Rightarrow \left(\varepsilon\varphi(\omega(t))\right)'=\frac{1}{2}y'(t) \Leftrightarrow (1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t)))\,\omega'(t)=\frac{1}{2}y'(t) \Rightarrow$$

$$\overset{t=t_0}{\Rightarrow}\ (1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t_0)))\,\omega'(t_0)=\frac{1}{2}y'(t_0) \Rightarrow (1+\frac{1}{4})\omega'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{4}\omega'(t_0)=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega'(t_0)=\frac{1}{5}\, rad/\sec .$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)=\frac{\ln x+ax}{x},\ x>0,\ a\in R$$

$$f((0,+\infty))=(-\infty,\ 1+\frac{1}{e})$$

Δ1.

$$f'(x)=\frac{(\frac{1}{x}+a)x-(\ln x+ax)}{x^2}=\frac{1+ax-\ln x-ax}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},x>0$$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq e$

x	0		e	
$f'(x)$	‖	+		−
$f(x)$	‖	↗	max	↘

Έχει max το $f(e)=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+ae}{e}=\frac{e+1}{e} \Leftrightarrow 1+ae=e+1 \Leftrightarrow ae=e \Leftrightarrow a=1$

Δ2.

Η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=2\ln\frac{1}{2}+1=-2\ln 2+1<0$$

(διότι $-2\ln 2+1<0 \Leftrightarrow 2\ln 2>1 \Leftrightarrow \ln 2>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 2>\ln\sqrt{e} \Leftrightarrow 2>\sqrt{e}$ που ισχύει)

$f(1)=\frac{\ln 1+1}{1}=1>0$

Άρα $f(1)\cdot f(\frac{1}{2})<0$

Από Θ. Bolzano $\exists x_0\in(\frac{1}{2},\ 1)$ ώστε $f(x_0)=0$ το οποίο είναι μοναδικό αφού f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\frac{1}{2},1)$.

$$f([e,+\infty))\overset{f\,\gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu.}{=}(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(e)]\overset{*}{=}(1,\ \frac{1}{e}+1]$$

Αφού $0\notin f([e,+\infty))$ άρα ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ρίζα της $f(x)=0$ στο $[e,+\infty)$

$$*\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+x}{x}\underset{DL'H}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{1}=1$$

Δ3. **i)** $f(x) = f(4)$

Προφανείς ρίζες $x_1 = 2,\ x_2 = 4$ οι οποίες είναι μοναδικές αφού f γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

ii) $2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow$

$$\frac{\ln x}{x} \ge \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln x}{x} + 1 \ge \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \ge f(2)$$

Για $x \in (0,\ e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow x \ge 2 \Leftrightarrow 2 \le x \le e$

Για $x \in (e,\ +\infty)$ η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$f(x) \ge f(2) = f(4) \Leftrightarrow$

$f(x) \ge f(4) \Leftrightarrow x \le 4 \Leftrightarrow e < x \le 4$.

Τελικά $x \in [2, 4]$.

Δ4. $g(x) = f(e^x) \cdot \dfrac{1-x}{e^x}$

$$E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\ln 2}^{0} \left| f(e^x)\frac{1-x}{e^x} \right| \mathrm{d}x$$

Θέτω $u = e^x \Rightarrow x = \ln u \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$

Για $x = -\ln 2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{2}$

Για $x = 0 \Rightarrow u_2 = 1$

Άρα $E = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u)\frac{1-\ln u}{u} \right| \frac{1}{u}\mathrm{d}u$

Έχω $\dfrac{1-\ln u}{u} > 0\ \forall\ u \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, οπότε $E = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)| \frac{1-\ln u}{u} \cdot \frac{1}{u}\mathrm{d}u =$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} |f(u)| \frac{1-\ln u}{u^2}\,\mathrm{d}u + \int_{x_0}^{1} |f(u)| \frac{1-\ln u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Αν $x \in \left[\dfrac{1}{2}, x_0\right] \overset{f\ \text{γν.αυξ.}}{\Rightarrow} f(x) \le f(x_0) = 0$

Αν $x \in [x_0, 1] \overset{f \text{ γν.αυξ.}}{\Rightarrow} f(x) \geq f(x_0) = 0$

Άρα $E = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}\,\mathrm{d}u + \int_{x_0}^{1} f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}\,\mathrm{d}u$

Όμως $f'(u) = \frac{1-\ln u}{u^2}$ οπότε

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u)f'(u)\,\mathrm{d}u + \int_{x_0}^{1} f(u)f'(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$\left[-\frac{1}{2}f^2(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[-\frac{1}{2}f^2(u)\right]_{x_0}^{1} =$$

$$\cancelto{0}{-\frac{1}{2}f^2(x_0)} + \frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f^2(1) \cancelto{0}{-\frac{1}{2}f^2(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{2}(-2\ln 2 + 1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{(1-\ln 4)^2}{2} + \frac{1}{2} \quad \tau.\mu.$$