ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 135

Α2. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 51
Α3. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 23

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω όπου $x = x-1$ και έχω
$f(x) = x \cdot e^{1-x}$

Β2. Η f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων

$f'(x) = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (1-x)$

$f'(x) = 0 \overset{e^{1-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \overset{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$
Η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$
Η f έχει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

Β3. $f''(x) = -e^{1-x} \cdot (1-x) - e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (-1 + x - 1)$

$$\Leftrightarrow f''(x) = -e^{1-x} \cdot (x-2)$$

$$f''(x) = 0 \overset{e^{1-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) = 0 \overset{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	
			Σ.Κ.		

Η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

Η f κύρτη στο $[2, +\infty)$

Η C_f έχει σημείο καμπής το $\left(2, \dfrac{2}{e}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} \overset{u=1-x}{\underset{u\to+\infty}{=\!=}} \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} \overset{u=1-x}{\underset{u\to-\infty}{=\!=}} \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \cancel{\lambda}^{0} \cdot x \right] = \lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot e^{1-x} \right) \overset{u=1-x}{\underset{u\to-\infty}{=\!=}}$$

$$= \lim_{u\to-\infty} (1-u) \cdot e^{u} = \lim_{u\to-\infty} \frac{1-u}{e^{-u}} =$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\Delta LH}{=\!=}} \lim_{u\to-\infty} \frac{(1-u)'}{\left(e^{-u}\right)'} = \lim_{u\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-u}} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία ε: $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

i)

$$f\left((-\infty, 1]\right) \overset{f \nearrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$$

$$\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}: \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x \bullet e^{1-x}) \overset{u=1-x}{\underset{u\to+\infty}{=}}$$

$$= \lim_{u\to+\infty} (1-u) e^{u} = (-\infty) \bullet (+\infty) = -\infty$$

$$f([1, +\infty)) \overset{f \searrow}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0, 1]$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1]$

ii)

- Αν $\lambda \leq 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \notin (0, 1]$.
- Αν $0 < \lambda < 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \in (0, 1]$.
- Αν λ = 1, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα το x = 1 γιατί για $x < 1 \overset{f \text{ αύξ.}}{\Rightarrow} f(x) < f(1) = 1$ και για $x > 1 \overset{f \text{ φθίν.}}{\Rightarrow} f(x) < f(1) = 1$.
- Αν $\lambda > 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική.

Η f συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ έχει ελάχιστο στο π ως τριγωνομετρική $f(\pi) = -1$

Στο $x_0 = 0$ έχω

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1\right) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \text{συν}x = 1$

$f(0) = 1$

Άρα f συνεχής και στο $x_0 = 0$

Τελικά f συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x}(\alpha x^2 - 3x - 1)}{\cancel{x}} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0$$

Άρα $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ δεν υπάρχει ,δηλ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2 **i)**

· η f είναι συνεχής στο [0, $\frac{3\pi}{2}$] από Γ1

· η f παραγωγίσιμη στο (0, $\frac{3\pi}{2}$) με f '(x) = (συνx)' = -ημx

· f(0) = 1

· $f(\frac{3\pi}{2}) = συν\frac{3\pi}{2} = 0$

· $f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$

Άρα δεν ισχύει το Θεώρημα Rolle

ii)

$\forall x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ έχω f '(x) = -ημx

$f'(ξ) = 0 \Leftrightarrow -ημξ = 0 \Leftrightarrow ημξ = 0 \Leftrightarrow$

$ημξ = ημ0 \Leftrightarrow ξ = 2κπ$ ή $ξ = 2κπ + π$

$\Leftrightarrow ξ = κπ$, $κ \in Z$

$0 < ξ < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$0 < κπ < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < κ < \frac{3}{2}$

Αφού $κ \in Z$, κ = 1

Άρα ξ = π

Γ3.

Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(-\infty, 0)$

$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$

$\Delta = 36 + 12a$

Έχω $a < -3 \Rightarrow 12a < -36 \Leftrightarrow 36 + 12a < -36 + 36 \Leftrightarrow \Delta < 0$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη

Γ4. Έχω $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$

Αφού $f'(x)$ έχει Δ<0

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

$f'(x) = -ημx < 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$

Αφού f συνεχής στο 0 έχω f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \pi]$

$f'(x) = -ημx > 0 \ \forall x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

x	$-\infty$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	
			ο.ε. $\boxed{-1}$		

Η f έχει ελάχιστο στο π το $f(\pi)=-1$, άρα $f(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$

Θεωρώ K(x) = $\ln x - \frac{1}{x}$, x>0

·η K(x) συνεχής στο [1,e] ως διαφορά συνεχών

·K(1) = ln1 - $\frac{1}{1}$ = 0 - 1 = -1 < 0

·K (e) = lne - $\frac{1}{e}$ = 1 - $\frac{1}{e}$ > 0

$\Rightarrow$ K(1)$\bullet$K(e) < 0

Από Θ. Bolzano $\exists$ $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$

K '(x) = $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \forall x\in(0,+\infty)$

K(x) ↗ στο $(0,+\infty)$

Άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα.

Δ2. f(x) = (lnx)(x+1) - lnx -1

$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}$

έχει προφανή ρίζα από Δ_1 το x_0

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \;\; \forall\; x>0 \Rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα

Άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)$

Για $0<x<x_0 \overset{f'\text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, x_0\right]$

Για $x>x_0 \overset{f'\text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\left[x_0, +\infty\right)$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	o.ε. $\boxed{0}$	$\nearrow$	

Άρα έχει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)=0$

Δ3 $\quad g(x)=x\cdot e^{-x} \quad ,x\in\mathbb{R}$

$h(x)=\left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad x\in\mathbb{R}$

Για $x<0$, $g(x)<0$ και $h(x)>0$. Άρα η $g(x)=h(x)$ είναι αδύνατη.

Για $x=0$, $g(0)=0$ και $h(0)=1$. Άρα $g(x)\neq h(x)$.

Για $x>0$:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \ln(x\cdot e^{-x})=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot(\ln x_0-\ln e)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot(\ln x_0-1)\Leftrightarrow \ln x-x=\ln x_0\cdot(x+1)-x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0(x+1)-\ln x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$$

Από Δ έχω μοναδική ρίζα x_0 .
Άρα έχω μοναδικό κοινό σημείο.

$$g'(x)=(x)'e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=e^{-x}-x\cdot e^{-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x_0)=e^{-x_0}-x_0\cdot e^{-x_0}=e^{-x_0}(1-x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot(x+1)'=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ln x_0-1)=$$

$$=\frac{x_0^{\,x_0+1}}{e^{x_0+1}}\cdot(\ln x_0-1)$$

Πρέπει $g'(x_0)=h'(x_0) \Leftrightarrow \dfrac{1-x_0}{e^{x_0}} = \dfrac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e \cdot e^{x_0}} \cdot (\ln x_0 - 1) \overset{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{\Leftrightarrow} e(1-x_0) = x_0^{x_0} \cdot x_0 (\frac{1}{x_0} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e(1-x_0) = x_0^{x_0} \cdot x_0 \frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow e(1-x_0) = x_0^{x_0} \cdot (1-x_0) \Rightarrow e = x_0^{x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln e = \ln x_0^{x_0} \Rightarrow 1 = x_0 \cdot \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

που ισχύει από Δ1

$$A\big(x, f(x)\big), \quad B\big(x, \varphi(x)\big)$$

Δ4.

$$\big(AB\big) = \sqrt{\big(x_B - x_A\big)^2 + \big(y_B - y_A\big)^2} = \sqrt{\big(x - x\big)^2 + \big(\varphi(x) - f(x)\big)^2} =$$

$$= \sqrt{\big(\varphi(x) - f(x)\big)^2} = \big|\varphi(x) - f(x)\big| \overset{f(x) > \varphi(x)}{=} f(x) - \varphi(x)$$

Θεωρώ $h(x) = f(x) - \varphi(x)$

Έστω ότι η φ (x) δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Έστω ότι η φ (x) είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αφού έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 στο οποίο η h είναι παρ/μη από θεώρημα Fermat $h'(x_0) = 0$.

Έχω $h'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$ οπότε $h'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0)$

Από Δ2 η f έχει ελάχιστο στο x_0 με $f'(x_0)=0$

Άρα $\varphi'(x_0) = 0$ δηλαδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.