ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε

$$x_0 \in A \text{ ισχύει } \lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$$

Α2) **α) Λάθος**

Η συνάρτηση f γράφεται $f(x) = \begin{cases} -x \ , & x < 0 \\ x \ , & x \geq 0 \end{cases}$

- όταν h < 0, έχουμε $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$,

ενώ

- όταν h > 0, έχουμε $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$

β) Σωστό
γ) Λάθος

Ο τύπος της σχετικής συχνότητας είναι $f_i = \dfrac{v_i}{v}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και ν το μέγεθος του δείγματος.

Α3) **α)** $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

β) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$

γ) $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$

A4) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2$ έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0)^2+2x_0h+h^2-(x_0)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{(x_0)^2}+2x_0h+h^2-\cancel{(x_0)^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2x_0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

Άρα $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΘΕΜΑ Β

Β1) Αφού το 40% των μαθητών δεν διάβασε κανένα βιβλίο συμπεραίνουμε ότι

$$f_1\%=40.$$

Έτσι

$$F_1\%=f_1\%=40.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$F_2\%=70\Leftrightarrow F_1\%+f_2\%=70\Leftrightarrow 40+f_2\%=70$$

$$\Leftrightarrow f_2\%=70-40\Leftrightarrow f_2\%=30.$$

Επίσης

$$F_3\%=90\Leftrightarrow F_2\%+f_3\%=90\Leftrightarrow 70+f_3\%=90$$

$$\Leftrightarrow f_3\%=20$$

Έτσι λοιπόν

$$f_3=0,2\Leftrightarrow\frac{v_3}{v}=0,2\Leftrightarrow\frac{10}{v}=0,2\Leftrightarrow 10=0,2v$$

$$\Leftrightarrow\frac{10}{0,2}=v\Leftrightarrow v=\frac{10\cdot 10}{0,2\cdot 10}\Leftrightarrow v=\frac{100}{2}\Leftrightarrow v=50.$$

Θα συμπληρώσουμε τη στήλη των συχνοτήτων

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0{,}4 = \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow v_1 = 50 \cdot 0{,}4 \Leftrightarrow v_1 = 20.$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0{,}3 = \frac{v_2}{50} \Leftrightarrow v_2 = 50 \cdot 0{,}3 \Leftrightarrow v_2 = 15.$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow 0{,}1 = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 50 \cdot 0{,}1 \Leftrightarrow v_4 = 5.$$

Για τη στήλη των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων έχουμε

$$N_1 = v_1 = 20$$

$$N_2 = N_1 + v_2 = 20 + 15 = 35.$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 35 + 10 = 45.$$

$$N_4 = v = 50.$$

Τελικά ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	**20**	**40**	**20**	**40**
1	**15**	**30**	**35**	70
2	10	**20**	**45**	90
3	**5**	10	**50**	100
Σύνολο	**50**	100		

B2) Το ποσοστό των μαθητών που έχει διαβάσει τρία βιβλία αντιστοιχεί στην σχετική συχνότητα

$$f_4 = 0{,}1 = 10\%.$$

B3) Το πλήθος των μαθητών που διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο είναι όσοι μαθητές διάβασαν 1 βιβλίο, 2 βιβλία, 3 βιβλία δηλαδή είναι

$$k = v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 5 = 30 \text{ μαθητές.}$$

B4) Οι μαθητές που διάβασαν το πολύ 2 βιβλία είναι όσοι μαθητές διάβασαν 2 βιβλία, 1 βιβλίο, 0 βιβλία και το αντίστοιχο ποσοστό είναι

$$p = f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}9 = 90\% \text{ των μαθητών.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,-2)$ οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της .

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$f(-1)=-2 \ \textbf{(1)}.$$

Όμως

$$f(-1)=(-1)^3-\lambda(-1)^2+2=-1-\lambda+2=1-\lambda$$

Οπότε από τη σχέση **(1)** προκύπτει

$$1-\lambda=-2 \Leftrightarrow -\lambda=-2-1 \Leftrightarrow -\lambda=-3 \Leftrightarrow \lambda=3.$$

Γ2) Για $\lambda=3$ ο τύπος της συνάρτησης f είναι

$$f(x)=x^3-3x^2+2,\ x\in\mathbb{R}$$

Οπότε η πρώτη παράγωγος συνάρτηση της f είναι

$$f'(x)=\left(x^3-3x^2+2\right)'=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+(2)'$$

$$=3x^2-3\left(x^2\right)'+0=3x^2-3(2x)=3x^2-6x,\ x\in\mathbb{R}$$

Η δεύτερη παράγωγος συνάρτηση της f θα προκύψει παραγωγίζοντας την πρώτη παράγωγο της f που βρήκαμε ακριβώς παραπάνω.

Έτσι λοιπόν είναι

$$f''(x)=\left(3x^2-6x\right)'=\left(3x^2\right)'-(6x)'=3\left(x^2\right)'-6(x)'$$

$$=3(2x)-6\cdot 1=6x-6,\ x\in\mathbb{R}$$

Γ3) Αρχικά θα βρούμε τις ρίζες της παραγώγου συνάρτησης της f.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \text{ή}\ x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \ \text{ή}\ x=2.$$

x	$-\infty$	0	2 $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
f	<	>	<

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι

- Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και στο διάστημα $\Delta_3 = [2, +\infty)$.
- Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $\Delta_2 = [0, 2]$.
- Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_1 = 0$ με τιμή
$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$$
- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 = 2$ με τιμή
$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2.$$

Γ4) Για το ζητούμενο όριο έχουμε

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \lim_{x \to 1} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{6(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{2(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20} \quad \text{έχουμε}$$

$$f'(x) = \left[(x^2 + 4x + 5)^{20}\right]' = 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x^2 + 4x + 5)' =$$

$$= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (2x + 4)$$

$$= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2(x + 2)$$

$$= 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2), \quad \text{για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$

Δ2. Το ζητούμενο όριο παρατηρούμε ότι είναι η τιμή της παραγώγου συνάρτησης της f για $x=-2$. Δηλαδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=f'(-2)$$

$$=f'(-2)=40\left((-2)^2+4(-2)+5\right)^{19}\cdot(-2+2)$$

$$=40\left((-2)^2+4(-2)+5\right)^{19}\cdot 0=0$$

Δ3. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο όπου η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x οπότε

$$\lambda_{εφ}=0$$

Δηλαδή

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow 40\left(x_0^2+4x_0+5\right)^{19}\cdot(x_0+2)=0$$

- $x_0^2+4x_0+5=0$ που είναι αδύνατη αφού η διακρίνουσα

$$\Delta=4^2-4\cdot 5=-4<0$$

- $x_0+2=0\Leftrightarrow x_0=-2$

με $f(-2)=\left((-2)^2+4(-2)+5\right)^{20}=(4-8+5)^{20}=1^{20}=1$

Οπότε το σημείο M είναι το

$$M(-2,f(-2))=(-2,1)$$

Επομένως

$$\lambda_{εφ}=f'(-2)=0$$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι

$$y=f'(-2)x+\beta\Leftrightarrow y=0\cdot x+\beta\Leftrightarrow y=\beta$$

Επειδή το σημείο M είναι σημείο της εφαπτόμενης η εξίσωση θα είναι

y=1

Δ4. Έστω $A(x,1)$ το σημείο της ευθεία y=1 με x > 0.

Η απόσταση των σημείων Α και Ο δίνεται από

$$(OA)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(1-0)^2+(x-0)^2}=\sqrt{x^2+1}$$

Έστω $(OA)=d(x)=\sqrt{x^2+1}$ με x > 0

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος έχουμε

$$d'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων Α και Ο όταν x=1 είναι

$$d'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$