ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Σελίδα 111 Σχολικού βιβλίου, Θεώρημα.
Α2 Σελίδα 104 Σχολικού βιβλίου, ορισμός.
Α3 Σελίδα 74 Σχολικού βιβλίου, Θεώρημα.
Α4 α) Λ

β) Έστω $f(x) = x$ με $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

άρα το όριο της $\dfrac{1}{f}$ στο $x = 0$ δεν υπάρχει.

Α5 α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1 Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$

Με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{3x_1 + 1}{x_1 - 3} = \dfrac{3x_2 + 1}{x_2 - 3} \Leftrightarrow 3x_1x_2 + x_2 - 9x_1 - 3 = 3x_1x_2 + x_1 - 9x_2 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \cdot x_2 = 10 \cdot x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow \ f \ \textit{είναι} \ "1-1" \ \textit{επομένως αντιστρέφεται.}$

Β2 Είναι $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow yx - 3y = 3x + 1 \Leftrightarrow (y-3)x = 3y + 1$ (1)

Αν $y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = 10$ άτοπο

$\Rightarrow y \neq 3 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = \dfrac{3y+1}{y-3}$

Πρέπει $x \neq 3 \Rightarrow \dfrac{3y+1}{y-3} \neq 3 \Leftrightarrow 3y + 1 \neq 3y - 9 \Leftrightarrow 1 \neq -9$ ισχύει

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$ $\mu\varepsilon$ $x \neq 3$

Οι συναρτήσεις f *και* f^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ - ΙΛΙΟΝ

$\mathrm{A} = \mathbb{R} - \{3\}$ και για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$

B3 Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει: $\left.\begin{array}{l} x \in \mathrm{A}_f \\ f(x) \in \mathrm{A}_f \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x \neq 3 \\ f(x) \neq 3 \end{array}\right\}$ $x \neq 3$ διότι $f(x) \neq 3$ από B_2.

Έτσι για $x \neq 3 \Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

διότι από (B_2) είναι $f(x) = f^{-1}(x)$.

B4 Είναι $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x+1}{x-3} = \dfrac{0}{-\frac{10}{3}} = 0.$

Επίσης $\left| f(x) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \right| \Rightarrow \left| f(x) \right| \cdot \left| \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \right| \leq \left| f(x) \right|$ (1)

αφού $\left| \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \right| \leq 1$ κοντά στο -1/3.

Άρα από (1) $\Rightarrow \left| f(x) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \right| \leq \left| f(x) \right| \Rightarrow -\left| f(x) \right| \leq f(x) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \leq \left| f(x) \right|$ (2)

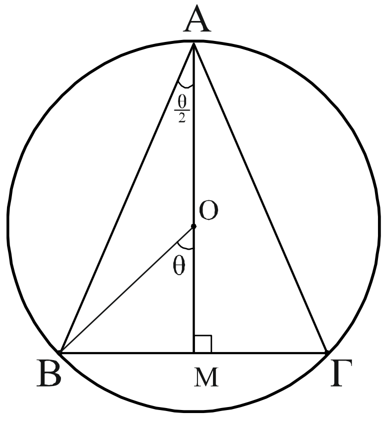
Είναι $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left| f(x) \right| = \left| \lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} f(x) \right| = 0$

Επίσης $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} (-\left| f(x) \right|) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \right) = 0$

από το κριτήριο παρεμβολής.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΜ έχουμεΟΜ = συνθ, ΟΑ = 1
ΒΜ = ημ θ



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ - ΙΛΙΟΝ

Άρα

$$\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{AO}+\mathrm{OM}\right)\cdot 2\mathrm{BM}=\left(1+\text{συν}\theta\right)\cdot\text{ημ}\theta \quad \theta\in\left(0,\pi\right).$$

Γ2. Θεωρώ $\mathrm{E}\left(\theta\right)=\left(1+\text{συν}\theta\right)\cdot\text{ημ}\theta \quad \theta\in\left(0,\pi\right)$

$$\mathrm{E}'\left(\theta\right)=-\text{ημ}\theta\cdot\text{ημ}\theta+\left(1+\text{συν}\theta\right)\cdot\text{συν}\theta=$$
$$=-\text{ημ}^2\theta+\text{συν}^2\theta+\text{συν}\theta=$$
$$=2\text{συν}^2\theta+\text{συν}\theta-1,\quad \theta\in\left(0,\pi\right)$$

$$\mathrm{E}'\left(\theta\right)=0\Leftrightarrow 2\text{συν}^2\theta+\text{συν}\theta-1=0\Leftrightarrow \text{συν}\theta=-1 \quad \text{ή} \quad \text{συν}\theta=\frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{E}'\left(\theta\right)>0\Leftrightarrow \text{συν}\theta<-1,\ \text{αδύνατη} \quad \text{ή} \quad \text{συν}\theta>\frac{1}{2}\overset{\theta\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}\theta<\frac{\pi}{3}\ \ \mu\varepsilon\ \theta>0$$

(διότι συνθ γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\pi\right)$).

	0		π/3		π
$E'(\theta)$		+	0	-	
$E(\theta)$		↗	max	↘	

Δηλαδή όταν $\theta=\frac{\pi}{3}$ έχω $\mathrm{E}\left(\theta\right)\to\max$, άρα η γωνία $\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$ δηλαδή το ισοσκελές γίνεται ισόπλευρο.

Γ3. Έχω ότι $\varepsilon(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

άρα $\mathrm{E}\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\lim\limits_{\theta\to0^+}\mathrm{E}(\theta),\ \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}\mathrm{E}(\theta)\right)=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

Επειδή $0<\frac{3}{4}<\frac{3}{4}\sqrt{3}\Rightarrow\frac{3}{4}\in f\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right)$ υπάρχει μοναδικό $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right):\mathrm{E}\left(\theta_1\right)=\frac{3}{4}$

Η $\mathrm{E}(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ με

$\mathrm{E}\left(\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)\right)=\left(\lim\limits_{x\to\pi^-}\mathrm{E}(\pi),\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

Δηλ $\frac{3}{4}\in\mathrm{E}\left(\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)\right)$ άρα υπάρχει μοναδικό $\theta_2\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right):\mathrm{E}\left(\theta_2\right)=\frac{3}{4}$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ - ΙΛΙΟΝ

Γ4. Από Θ.Μ.Τ. στο $\left[\theta_1,\dfrac{\pi}{3}\right]$ έχω ότι $\exists\ \xi_1 \in \left(\theta_1,\dfrac{\pi}{3}\right): \mathrm{E}'(\xi_1)=\dfrac{\mathrm{E}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{E}(\theta_1)}{\dfrac{\pi}{3}-\theta_1}$

$\Leftrightarrow \mathrm{E}'(\xi_1)\cdot\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_1\right)=\mathrm{E}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{E}(\theta_1)$ (1) και από Θ.Μ.Τ. στο $\left[\dfrac{\pi}{3},\theta_2\right]$ έχω ότι

$\exists\ \xi_2 \in \left(\dfrac{\pi}{3},\theta_2\right): \mathrm{E}'(\xi_2)=\dfrac{\mathrm{E}(\theta_2)-\mathrm{E}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\dfrac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \mathrm{E}'(\xi_2)\cdot\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\right)=\mathrm{E}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{E}(\theta_2)$ (2)

(1) (2) $\xrightarrow{\mathrm{E}(\theta_1)=\mathrm{E}(\theta 2)=\frac{3}{4}} \mathrm{E}'(\xi_1)\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_1\right)=\mathrm{E}'(\xi_2)\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{\lambda}{\lambda x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x},\quad x>0.$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0 \to f'$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $f'(1)=0$ και επομένως για $x>1 \overset{f'\ \text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)=0$

και για $0<x<1 \overset{f'\ \text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)=0$

X	0		1	$+\infty$
f'		-	0	+
f		↘		↗

$f(1)=-\ln\lambda$

Από τον πίνακα με το πρόσημο της f' έχουμε ότι η f είναι στο (0, 1] γνησίως φθίνουσα και στο [1, +∞) γνησίως αύξουσα και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x= 1 το $f(1)=-\ln\lambda$.

Άρα το ακρότατο είναι το $(1,-\ln\lambda)$ με $\lambda>0$ και η συνάρτηση $-\ln\lambda$ παίρνει τιμές στο $(-\infty,+\infty)$ και επομένως το ακρότατο θα βρίσκεται στην ευθεία $x=1$.

Δ2. $x^x\ge\lambda x \Leftrightarrow \ln x^x\ge\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x-\ln(\lambda x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge 0.$

Όμως $f(x)\ge-\ln\lambda$ από **Δ1.**, άρα πρέπει

$-\ln\lambda\ge 0\Rightarrow \ln\lambda\le 0\Leftrightarrow \ln\lambda\le\ln 1\Rightarrow\lambda\le 1\Rightarrow\lambda_{\mu\varepsilon\gamma}=1.$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ - ΙΛΙΟΝ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ

Δ3. Είναι $g(x) = x^x = e^{x\ln x}$ με

$$g'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(x\ln x\right)' = g(x)(\ln x + 1) \qquad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\left(x_0, g(x_0)\right)$ με $x_0 > 0$ είναι: $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$.

Για να διέρχεται από το O(0, 0) πρέπει:

$$-g(x_0) = g'(x_0)(-x_0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g(x_0) = g(x_0)(\ln x_0 + 1)x_0 \overset{g(x_0)>0}{\Leftrightarrow} 1 = (\ln x_0 + 1)x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \ln x_0 + 1 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x_0} + 1 = 0 \qquad (2).$$

Θεωρώ $\lambda(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$ με $x > 0$, είναι $\lambda'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \lambda(x)$ γνησίως αύξουσα, άρα και '1-1'. Η (2) γίνεται $\lambda(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda(x_0) = \lambda(1) \underset{\lambda(1-1)}{\Leftrightarrow} x_0 = 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\left(1, g(1)\right)$ δηλαδή στη (1, 1) είναι:

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x \quad \text{αφού} \quad g(1) = g'(1) = 1.$$

Δ4. i)

$$h(x) = \begin{cases} x^x, x > 0 \\ 1, \ \ x = 0 \end{cases}$$

Για $x > 0$, $h(x) = e^{x\ln x}$ συνεχής σαν σύνθεση και πράξεις μεταξύ συνεχών.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} \underset{\substack{x\to 0^+ \\ u\to 0}}{\overset{x\ln x = u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1 = h(0)$ άρα η h συνεχής στο $[0, +\infty)$.

ii) Θεωρώ $k(x) = x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)\mathrm{d}t\right) + (1 - x)\int_0^1 h(1 - t)\mathrm{d}t$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Είναι $k(0) = \int_0^1 h(1 - t)\mathrm{d}t$. Θέτω $1 - t = u \Rightarrow dt = -du$

Για $t = 0 \Rightarrow u = 1$ και για $t = 1 \Rightarrow u = 0$

άρα $k(0) = -\int_1^0 h(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ όμως $g(x) > 0$ στο $[0,1]$

$\Rightarrow \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow k(0) > 0.$

Επίσης $k(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)\mathrm{d}t$

Από Δ2 για $\lambda = 1$: $x^x \geq x,\ x > 0$

Δηλαδή $g(x) \geq x,\ x > 0$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ - ΙΛΙΟΝ

Οπότε $\int_1^2 g(t)\mathrm{dt} > \int_1^2 t\mathrm{dt} = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 - 2\int_1^2 g(t)\mathrm{dt} < 0$

Άρα $k(1) < 0$

Επομένως $k(0)\cdot k(1) < 0$, άρα για την $k(x)$ ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$ άρα η εξίσωση $k(x) = 0$ δηλαδή $x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)\mathrm{dt}\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)\mathrm{dt} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ - ΙΛΙΟΝ