ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών απόδειξη παράγρ.1.8 σχολικό βιβλίο

Α2. Ορισμός παράγρ. 2.2 σχολικό βιβλίο

Α3. (Λ) πχ $f(x)=x^3 \left|\mathbb{R}\ f\ \textit{γνησίως αύξουσα}\right|\mathbb{R}$ αλλά $f'(x)=3x^2 \geq 0$ στο $\mathbb{R}$.

Α4. α) → Λ, β) → Σ, γ) → Σ, δ) → Σ, ε) → Σ,

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_f=(1,+\infty) \quad A_g=\mathbb{R}$

Η *fog* ορίζεται στο σύνολο

$A_{fog}=\left\{x \in A_g \text{ ώστε } g(x) \in A_f\right\}=\left\{x \in \mathbb{R} \text{ ώστε } e^x>1\right\}=(0,+\infty)$.

Οπότε $(fog)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1},\ x>0.$

Β2. **Έστω** $x_1, x_2 \in (0,+\infty):(fog)(x_1)=(fog)(x_1) \Rightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(e^{x_1}+2\right)\left(e^{x_2}-1\right)=\left(e^{x_2}+2\right)\left(e^{x_1}-1\right) \Rightarrow e^{x_1x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1x_2}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3e^{x_1}=3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \Rightarrow x_1=x_2.$

Οπότε *fog* είναι 1-1 άρα υπάρχει η

$(fog)^{-1} : (fog)\big((0,+\infty)\big) \to \mathbb{R}$

Είναι $y = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y + 2$ (1)

Αν $y = 1$ η (1) $\Leftrightarrow 0e^x = 3$ αδύνατη, άρα $1 \notin (fog)\big((0,+\infty)\big)$

Αν $y \neq 1$ η (1) $\Leftrightarrow e^x = \dfrac{y+2}{y-1}$.

Πρέπει $\dfrac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y < -2$ ή $y > 1$ (2)

και

$x = \ln(\dfrac{y+2}{y-1})$ αλλά $x > 0 \Leftrightarrow \ln(\dfrac{y+2}{y-1}) > \ln 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$ (3)

Από (2), (3) τελικά $y > 1$

Έτσι: $\varphi(x) = (fog)^{-1} = \ln(\dfrac{x+2}{x-1}),\ \ x > 1$

B3. Για $x > 1$: $\varphi'(x) = \dfrac{x-1}{x+2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1}{x+2}\,\dfrac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 2}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x+2)(x-1)^2} < 0$

Άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

B4. $\lim\limits_{x \to +1^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +1^+} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) \overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim\limits_{n \to +\infty} \ln u = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) \overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim\limits_{n \to 1} \ln u = \ln 1 = 0.$

ή για το (Β2) μελετάμε τη μονοτονία της *fog* μέσω παραγώγου και σύνολο τιμών της με όρια.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών.

Η f συνεχής στο $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ομοίως ως πράξεις μεταξύ συνεχών.

Αφού είναι συνεχής η f πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Άρα πρέπει :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda) = \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = 1 - \ln\lambda \Leftrightarrow$$

$1 - \ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln\lambda = 1-\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda + \lambda - 1 = 0.$ (1)

Θεωρώ $\varphi(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$ με $\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Από (1) είναι $\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \overset{\varphi\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\underset{\varphi(1-1)}{\Leftrightarrow}} \lambda = 1$.

Γ2 Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Για $x < 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1-1+x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$

Επίσης $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$

Για $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$, άρα $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$

Επομένως $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

Άρα η εφαπτόμενη στο Α $(0,1)$ έχει εξίσωση:

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα xx' είναι:

$\varepsilon\varphi\omega = f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$ $(\omega \in [0,\pi))$..

Γ3. Για $x < 0$: $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x > 0$: $f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$

Για $x \le 0$ είναι $f'(x) > 0$.

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}x - \text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{συν}x$

$\overset{\text{συν}x \neq 0}{\Leftrightarrow}$ $\text{εφ}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$ αφού $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Επειδή λοιπόν η f' ορίζεται στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ και $f'(x) = 0$ στα $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$ αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - a)$.

Για $y = 0 \Rightarrow -f(a) = f'(a)x - af'(a) \Leftrightarrow x = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ είναι

$\text{B}\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$

Επομένως $\text{x}_\text{B} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{(1-a)^2}} = a - (1-a) = 2a - 1$.

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι:

$\text{x}_\text{B}(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow \text{x}'_\text{B}(t) = 2a'(t) \Rightarrow \text{x}'_\text{B}(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow \text{x}'_\text{B}(t) = -\frac{2}{3}a(t)$ (1)

Όμως ισχύει $a(t_0) = -1$

Από (1) για $t = t_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3}$ $\frac{\text{μονάδα μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

$f'(x) = e^x + 2x - e \quad x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = e^x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$

$f''(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$ άρα *f' γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

Η f' στο [0, 1] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αφού

$f'(0) = 1 - e < 0$

$f'(1) = 2 > 0$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1): f'(x_0) = 0$

Το παραπάνω είναι μοναδικό στο $\mathbb{R}$ αφού *f' γνησίως αύξουσα* στο $\mathbb{R}$.

Έτσι

$x < x_0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$

$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min: $f(x_0)$	$\nearrow$	

Έχουμε:

$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^{\ 2} - ex_0 - 1 \qquad (1)$

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \qquad (2)$

Η $(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^{\ 2} - ex_0 - 1 = x_0^{\ 2} - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2. Από (Δ1) για $x \neq x_0$ είναι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$

$\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$ λόγω συνέχειας της f στο x_0.

Οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty \quad (3)$

Ακόμη για $x \neq x_0$ είναι:

$\eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right) \geq \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \quad (4)$

Από (3) $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1\right) = +\infty$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right)\right] = +\infty$

Δ3 Έστω $\varphi(x) = f(x) + x - x_0, \quad x \in [x_0, 1]$

Η φ είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών.

- $\varphi(x_0) = f(x_0)$

Όμως $x_0 < 1 \overset{(\Delta_1)}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) < 0$

- $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_0 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$

Ώστε: $\varphi(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)+\rho-x_0=0$

Η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική στο $[x_0,1]$

Αφού $\varphi'(x)=f'(x)+1>0 \ \ \sigma\tau o \ [x_0,1]$

$\Rightarrow \varphi \ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \ \ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \ \sigma\tau o \ [x_0,1].$

Δ4. Είναι $f(\rho)+\rho=x_0$ με $\rho\in(x_0,1)$ και $x_0\in(0,1)$

Έχουμε για $\kappa\in(\rho,1)$:

$f(x_o)>f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right) \Leftrightarrow f(x_o)-f(\rho)>f(\rho)f'(\kappa)$

$\overset{f(\rho)=x_0-\rho}{\underset{x_0<\rho}{\Leftrightarrow}} \dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa) \quad (5)$

Η f στο $[x_o,\rho]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi\in(x_0,\rho)$:

$f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} \quad (6)$

Η $(5) \overset{(6)}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(\kappa)$

Ισχύει αφού $f' \ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \ \sigma\tau o \, \mathbb{R}$ και $\xi<\rho, \ \kappa\in(\rho,1)$

Δ4. **2ος τρόπος λύσης**

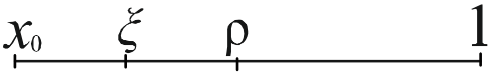
$f(x_0)>f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right) \Leftrightarrow f(x_0)>f(\rho)f'(\kappa)-f(\rho) \Leftrightarrow$

$f(x_0)-f(\rho)f'(\kappa)-f(\rho)>0$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$\varphi(x)=f(x_0)-f(\rho)f'(x)-f(\rho) \quad$ με $\quad x\in[\rho,1)$

είναι $\varphi(x)>0$.



Στο $[x_0,\rho]$ από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(x_0,\rho): f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} \Leftrightarrow f(x_0)-f(\rho)=f'(\xi)(x_0-\rho).$

Από το **Δ3.** είναι

$f(\rho)+\rho=x_0 \Leftrightarrow f(\rho)=x_0-\rho<0.$

Άρα $\varphi(x)=f'(\xi)(x_0-\rho)-(x_0-\rho)f'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(x)=(x_0-\rho)\left(f'(\xi)-f'(x)\right)$

Είναι

$\varphi'(x)=(x_0-\rho)\left(-f''(x)\right)>0,$ αφού $x_0-\rho<0$

και $f''(x)>0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $[\rho,1]$.

Άρα $\rho<x<1 \Leftrightarrow \varphi(x)>\varphi(\rho)=(x_0-\rho)\left(f'(\xi)-f'(\rho)\right) \qquad (1)$

Αφού $\xi < \rho \underset{f'\uparrow}{\overset{f''>0}{\Rightarrow}} f'(\xi) < f'(\rho) \Rightarrow f'(\xi) - f'(\rho) < 0$

και $x_0 - \rho < 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \varphi(x) > \varphi(\rho) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0.$