<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α**. Ορισμός, σελίδα σχολικού βιβλίου 15.

β. **i.** Η συνάρτηση έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1 στο Α.

ii. Είναι η συνάρτηση $g: f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία για κάθε $\psi \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = \psi$. Η συνάρτηση αυτή *g* συμβολίζεται f^{-1}.

Α2. Θεώρημα Fermat, σελίδα σχολ. βιβλίου 142.

Α3. Θεώρημα, σελίδα σχολ. βιβλίου 135.

Α4. **α**. Λάθος

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Α4. **β)** Λάθος. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x-2, & x > 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

Είναι $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x-2) = 1 \neq f(3)$

Α5. **γ.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + \lambda\right) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

B2. Έστω συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2,\ x\in[2,3]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [2, 3], ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{array}{l} g(2)=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0 \\ g(3)=e^{-3}-3+2=\dfrac{1}{e^3}-1=\dfrac{1-e^3}{e^3}<0 \end{array}\right\} g(2)\cdot g(3)<0.$$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Επίσης $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in[2,3]$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς είναι 1–1, οπότε η x_0 είναι μοναδική λύση.

B3. $f'(x)=-e^{-x}<0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

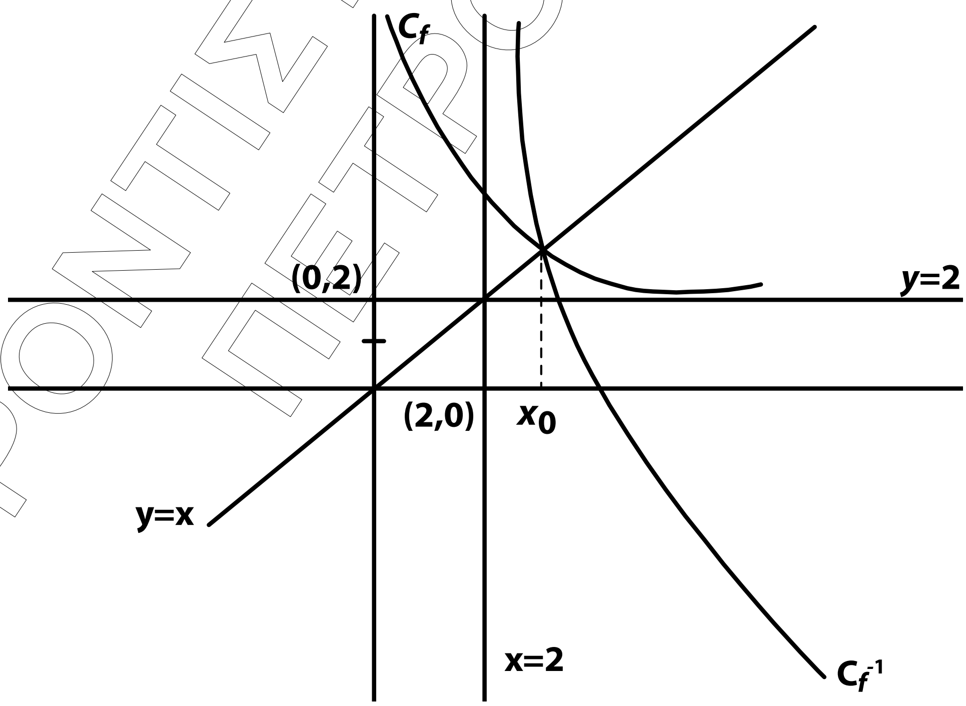
$y=f(x)\Leftrightarrow y=e^{-x}+2\Leftrightarrow y-2=e^{-x}\underset{y>2}{\Leftrightarrow}\ln(y-2)=-x\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\quad x>2$.

B4. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=-\infty$, αφού εάν θέσουμε $x-2=u$ όταν $x\to 2^+ \Rightarrow u\to 0^+$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right]=-\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)=-\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=+\infty$ διότι $\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

Άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ ως παραγωγίσιμη.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1+\beta=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\underset{(D.L.H)}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}=$$
$$=\beta+1.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=2$$

Επειδή η *f* είναι παραγωγίσιμη στο 1, πρέπει $\beta+1=2$, άρα $\beta=1$, οπότε και $\alpha=1$.

Γ2. Για $x>1$, $f'(x)=2x>0$ (1)

Για $x<1$, $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ (2)

Και f συνεχής στο $\mathbb{R}$. (3)

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x)=-\infty$

Άρα $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Γ3. **i.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Άρα υπάρχει $\kappa<0$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)<0$ (1).

$f(0)=e^{-1}=\frac{1}{e}>0$ (2).

Άρα από Θεώρημα Bolzano στο $[\kappa,0]$, υπάρχει $x_0\in(\kappa,0)$ ώστε $f(x_0)=0$. Η x_0 είναι μοναδική λόγω μονοτονίας της f.

ii. $f^2(x)-x_0f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot(f(x)-x_0)=0$ (1)

Ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>x_0$, άρα η (1) στο $(x_0,+\infty)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)-x_0=0 \Leftrightarrow f(x)=x_0$.

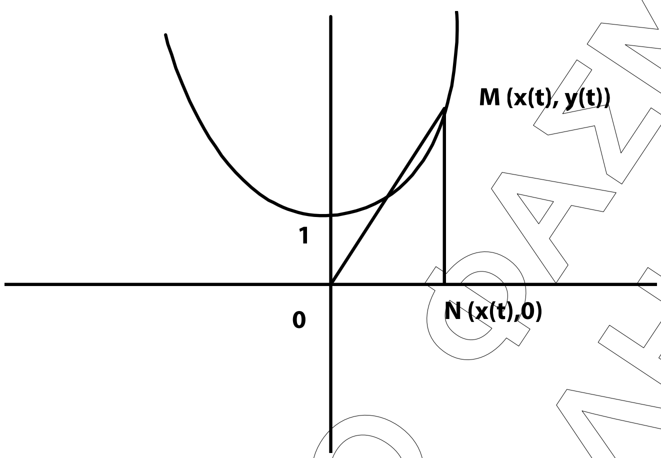
Η τελευταία είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$ διότι f γνησίως αύξουσα, άρα $f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$ ενώ $x_0<0$.

Γ4. $M\left(x(t),y(t)\right) \Rightarrow y(t)=x^2(t)+1$

$x(t_0)=3$

$y(t_0)=10$

$x'(t_0)=2$



$$E(t)=\frac{1}{2}x(t)y(t) \Rightarrow$$

$$E'(t)=\frac{1}{2}x'(t)y(t)+\frac{1}{2}x(t)y'(t) \overset{t=t_0}{\Rightarrow}$$

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)y(t_0)+\frac{1}{2}x(t_0)y'(t_0).$$

Ισχύει: $y'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2=12$

Άρα $E'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12=28$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta$

$\varepsilon: y=-x+2$

$f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$

$f'(1)=-1$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

$f'(1)=-1 \Leftrightarrow \boxed{a=-1}$ *και* $\boxed{\beta=2}$

Δ2 $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$ Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[1,2]$

$$\mathrm{E}=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\cancel{-x}\cancel{+2}\cancel{+x}\cancel{-2}\right|\mathrm{d}x=$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right|\mathrm{d}x$$

όπου $(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$

Έστω $u=x^2-2x+2 \Leftrightarrow \mathrm{d}u=(2x-2)\mathrm{d}x \Leftrightarrow$

$\mathrm{d}u=2(x-1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}u=(x+1)\mathrm{d}x$

Για $x=1 \Rightarrow u_1=1$

Για $x=2 \Rightarrow u_1=2$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 1\cdot\mathrm{d}u=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\ln 2\right)-\frac{1}{2}\cdot 1=\ln 2-\frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

Δ3. **i.** Είναι $f'(x)=\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\dfrac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}-1,\ \ x\in\mathbb{R}$

Προφανώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα ισχύει

$\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\dfrac{2(x-1)^2}{\left(x-1\right)^2+1}\geq 0$, Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, επομένως

$f'(x)\geq -1,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

ii. Είναι για $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda-(-2+\frac{1}{2})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f\left(\lambda\right)-\frac{1}{2}\quad (1)$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$. Όμως από Δ3 (i),

$f'(\xi) \geq -1$. Άρα $\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$ δηλαδή η (1).

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -3x^2 - 1$. Εξετάζουμε αν η εφαπτομένη της C_f στο A εφάπτεται της C_g στο σημείο της $\left(x_0, g(x_0)\right)$. Θα πρέπει τότε $g'(x_0) = -1 \Leftrightarrow -3x_0^2 - 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Έτσι η εφαπτομένη της C_g στο $B(0,2)$ είναι $y-2=-1(x-0) \Leftrightarrow y=-x+2$.

Άρα η ε κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στα σημεία τους A, B αντίστοιχα.
Η παραπάνω κοινή εφαπομένη είναι μοναδική γιατί:

- $f'(x_1) \geq -1,\ x_1 \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_1 = 1$
- $g'(x_2) \leq -1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_2 = 0$

Οπότε $f'(x_1) > g'(x_2)$ για κάθε ζεύγος (x_1, x_2) με $(x_1, x_2) \neq (1,0)$

Επομένως η παραπάνω εφαπτομένη $y=-x+2$ είναι μοναδική.