ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΠΑ.Λ. Α΄ & Β΄
21 ΜΑΪΟΥ 2015
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (i) Τα άκρα των διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού της *f*.

(ii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της *f*, στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της *f*. Δηλαδή στα γωνιακά σημεία της *f*.

(iii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της *f* στα οποία υπάρχει η παράγωγος της *f* και είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή στα στάσιμα σημεία της *f*.

Α2.

α	β	γ	δ	ε
Λ	Σ	Λ	Λ	Σ

Α3. **α)** $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_{\alpha}^{\beta}=\ln\beta-\ln\alpha=\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

β) $(c)'=0$.

γ) $\bar{x}=\frac{\nu_1x_1+\nu_2x_2+\ldots+\nu_\kappa x_\kappa}{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}=\frac{\nu_1x_1+\nu_2x_2+\ldots+\nu_\kappa x_\kappa}{\nu}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Χρόνος σε λεπτά	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
[5, 15)	10	20	20	200
[15, 25)	20	14	34	280
[25, 35)	30	12	46	360
[35, 45)	40	4	50	160
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		1000

Β2. $\bar{x}=\frac{200+280+360+160}{50}=\frac{1000}{50}=20$ λεπτά.

Β3. $s^2=\frac{\nu_1\left(\kappa_1-\bar{x}\right)^2+\nu_2\left(\kappa_2-\bar{x}\right)^2+\nu_3\left(\kappa_3-\bar{x}\right)^2+\nu_4\left(\kappa_4-\bar{x}\right)^2}{50}=$

$$= \frac{20(10-20)^2 + 14(20-20)^2 + 12(30-20)^2 + 4(40-20)^2}{50} =$$

$$= \frac{20 \cdot 100 + 14 \cdot 0 + 12 \cdot 100 + 4 \cdot 400}{50} = \frac{2000 + 1200 + 1600}{50} = \frac{4800}{50} = 96.$$

$s = \sqrt{96} \approx 10.$

B4. $\mathrm{CV} = \frac{s}{|\bar{x}|} \approx \frac{10}{20} = 0{,}5 = 50\%.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(4x + 4e^{x-2}\right) = 8 + 4 = 12.$

Γ2. Είναι: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{\lambda(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2+2x+4}{\lambda} = \frac{12}{\lambda}.$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ αν και μόνον αν $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2).$

Δηλαδή $12 = \frac{12}{\lambda} = 12$ ή $12 = \frac{12}{\lambda}$. Άρα λ = 1.

Γ4. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(4x + 4e^{x-2}\right)dx = 4\int_1^2 x\,dx + 4\int_1^2 e^{x-2}\,dx =$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 4\left[e^{x-2}\right]_1^2 = 4\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + 4\left(e^{2-2} - e^{1-2}\right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{2} + 4\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 6 + 4 - \frac{4}{e} = 10 - \frac{4}{e}.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$B(t) = \frac{-t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15, \quad 0 \le t \le 10$$

Δ1. Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους B του παγόβουνου είναι:

$$B'(t) = -t^2 + 4t + 12, \quad 0 \le t \le 10.$$

Δ2. Λύνουμε την εξίσωση $B'(t) = 0$ στο διάστημα $0 \le t \le 10$ και έχουμε:

$-t^2 + 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 12 = 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64,\ t_1 = \frac{4-8}{2} = -2,\ t_2 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6.$

Από τον πίνακα μεταβολών βρίσκουμε ότι η B παρουσιάζει μέγιστο τη χρονική στιγμή t = 6 έτη.

t	0		6		10
B΄ (t)		+	0	-	
B (t)		$\nearrow$		$\searrow$	

Δ3. Επειδή η B είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [6, 9] θα έχουμε:

$$6 \le t \le 9 \Rightarrow B(6) \ge B(t) \ge B(9).$$

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου δίνεται από την συνάρτηση:
$g(t) = B'(t) = -t^2 + 4t + 12$ στο διάστημα [0. 10]
Η πρώτη παράγωγος της g είναι $g'(t) = -2t + 4$, $t \in [0, 10]$.

Λύνουμε την εξίσωση $g'(t) = 0$ στο διάστημα [0, 10] και έχουμε:

$$-2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Από τον πίνακα μεταβολών της g βρίσκουμε ότι αυτή παρουσιάζει μέγιστο την χρονική στιγμή $t = 2$ έτη.

t	0		2		10
g΄ (t)		+	0	-	
g (t)		$\nearrow$		$\searrow$	