

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία, σελίδα 194 σχολικού βιβλίου.  
A2. Θεωρία, σελίδα 188 σχολικού βιβλίου.  
A3. Θεωρία, σελίδα 259 σχολικού βιβλίου.  
A4. α) Λ, β)  $\rightarrow \Sigma$ , γ)  $\rightarrow \Lambda$ , δ)  $\Sigma$ , ε)  $\rightarrow \Sigma$

## ΘΕΜΑ Β

- B1. Έστω  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Τότε από τη δοσμένη σχέση προκύπτει  
$$|(x-4) + yi| = 2|(x-1) + yi| \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow$$
$$3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2.$$
Δηλαδή προκύπτει κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 2$ .

(β' τρόπος) Έχουμε διαδοχικά:

$$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 2^2 \cdot |z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4) \cdot (\bar{z}-4) = 4 \cdot (z-1) \cdot (\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - 4 \cdot \bar{z} - 4z + 16 = 4 \cdot (z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} + 1) \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + 16 = 4z \cdot \bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3z \cdot \bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z| = 2.$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 2$ .

- B2. α) Ο  $w$  είναι πραγματικός, αν και μόνο αν, είναι  $\bar{w} = w$ .

Πράγματι

$$\bar{w} = w \Leftrightarrow \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow \frac{(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2)}{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(z_1^2 + z_2^2)}{z_1 \cdot z_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bar{z}_1^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_2^2 \cdot z_1 \cdot z_2 = z_1^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z_1 \bar{z}_1) \bar{z}_1 \cdot z_2 + (z_2 \bar{z}_2) z_1 \cdot \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1) z_1 \cdot \bar{z}_2 + (z_2 \bar{z}_2) z_2 \cdot \bar{z}_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z_1|^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 + |z_2|^2 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\bar{z}_1 \cdot z_2 + 4z_1 \bar{z}_2 = 4z_1 \cdot \bar{z}_2 + 4z_2 \bar{z}_1 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ αληθές.}$$

Άρα  $\bar{w} = w$  και  $w \in \mathbb{R}$ .

- β) Αρκεί να δείξουμε ότι  $|w| \leq 4$ .

Πράγματι:

$$|w| \leq 4 \Leftrightarrow \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq 4 \Leftrightarrow \left| \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2} \right| \leq 2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 2|z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 8.$$

Η τελευταία ισχύει διότι:

$$|z_1^2 + z_2^2| \leq |z_1^2| + |z_2^2| \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 8.$$

**B3.** Αν  $w = -4$  είναι

$$\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = -2z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0.$$

Από τη σχέση  $(z_1 + z_2)^2 = 0$  προκύπτει  $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$ .

$$|z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1| \cdot |2i - 1| = 2 \cdot |-1 + 2i| = 2\sqrt{5}.$$

$$|z_3 - z_2| = |2iz_1 + z_1| = |z_1| \cdot |2i + 1| = 2 \cdot \sqrt{5}.$$

Προκύπτει  $|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| \Leftrightarrow (ΑΓ) = (ΒΓ)$ .

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Είναι  $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}.$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών για την  $f$ .

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$+$
$f$	$\nearrow$		

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Αφού η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών θα είναι το διάστημα

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^x \frac{1}{x^2+1} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{2} \right) = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $(0, +\infty)$ .

**Γ2.** Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = f(2)$ . Όμως η  $f$  ως γνησίως αύξουσα είναι και 1-1. Άρα ισοδύναμα γράφεται:  $e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$ . Όμως η τιμή  $\frac{e^3}{2}$  ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$ , η οποία είναι και γνησίως αύξουσα. Άρα υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$ . Δηλαδή, η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.

**Γ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad \text{με } h'(x) = f(x).$$

Η σχέση  $\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x f(4x)$  με  $x > 0$ , γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{2x}^1 f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt < 2x f(4x) &\Leftrightarrow \int_1^{4x} f(t) dt - \int_1^{2x} f(t) dt < 2x f(4x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} < f(4x). \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως για την  $h$  ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο  $[2x, 4x]$  οπότε υπάρχει  $\xi \in (2x, 4x)$  ώστε

$$\frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = h'(\xi) \Leftrightarrow \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = f(\xi).$$

Έτσι αρκεί ναδειχθεί ότι  $f(\xi) < f(4x)$  με  $2x < \xi < 4x$ , που όμως ισχύει διότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Γ4.** Η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  διότι:

Για κάθε  $x > 0$  είναι:

$$g(x) = \frac{\int_{2x}^1 f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt}{x} = \frac{-\int_1^{2x} f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt}{x} = \frac{-h(2x) + h(4x)}{x}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(4x) - h(2x)}{x} \stackrel{(\text{Θ})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4h'(4x) - 2h'(2x)}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (4f(4x) - 2f(2x)) = 4f(0) - 2f(0) = 4 - 2 = 2.$$

(Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ ).

Άρα η  $g$  είναι συνεχής στο 0.

Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left( \frac{h(4x) - h(2x)}{x} \right)' = \left( \frac{h(4x)}{x} \right)' - \left( \frac{h(2x)}{x} \right)' = \\ &= \frac{(h(4x))' \cdot x - h(4x) \cdot x'}{x^2} - \frac{(h(2x))' \cdot x - h(2x) \cdot x'}{x^2} = \\ &= \frac{4f(4x) \cdot x - h(4x) - 2f(2x) \cdot x + h(2x)}{x^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{[2xf(4x) - 2xf(2x)] + 2xf(4x) - [h(4x) - h(2x)]}{x^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{f(4x) - f(2x)}{x} + \frac{2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2}.$$

Όμως  $4x > 2x$  και  $f$  γνησίως αύξουσα, άρα  $f(4x) > f(2x) \Leftrightarrow f(4x) - f(2x) > 0$

και λόγω του  $\Gamma_3$  είναι  $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt > 0$ .

Άρα  $g'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , οπότε (λόγω της συνέχειας στο 0), η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} + f'(x) \cdot e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για  $x = 0$  είναι:  $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c$  και επειδή  $f(0) = 0$ , προκύπτει  $c = 0$ .

$$\text{Άρα } e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 1 = 2x \cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2x \cdot e^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και επειδή η  $e^{f(x)} - x$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , προκύπτει ότι η  $e^{f(x)} - x$  διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Όμως  $e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$ .

$$\text{Άρα } e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$




**Δ2.** α) Είναι  $f'(x) = \left( \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)'$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f''(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)} = \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f(x)			

προκύπτει ότι η  $f$  είναι: κυρτή στο  $(-\infty, 0]$ , κοίλη στο  $[0, +\infty)$ , ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο  $(0, f(0)) = (0, 0)$ .

**β)** Είναι  $x - f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ . Πράγματι:

**(α' τρόπος):**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x - f(x)$  στο  $[0, 1]$ . Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$  με

$$g'(x) = (x - f(x))' = 1 - f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

με την ισότητα  $g'(x) = 0$  να ισχύει μόνον για  $x = 0$ .

Επομένως η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, 1]$ .

Οπότε  $g(x) \geq g(0) \quad \forall x \in [0, 1]$ . Ομως  $g(0) = 0 - f(0) = 0$ .

Άρα  $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ , άρα  $x - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ .

**(β' τρόπος):**

Η ανισότητα  $x - f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ , μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής:

Επειδή  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ , η εφαπτόμενη της  $C_f$  στο  $[0, +\infty)$  έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

Η  $f$  όμως είναι κοίλη στο  $[0, +\infty)$ , άρα η  $C_f$  βρίσκεται "κάτω" από την εφαπτομένη της  $y = x$  στο  $O(0, 0)$  για το διάστημα  $[0, +\infty)$ , άρα και το  $[0, 1]$ .

Έτσι  $f(x) \leq x$  για  $x \in [0, 1] \Leftrightarrow x - f(x) \geq 0$  για  $x \in [0, 1]$ .

$$\text{Έτσι είναι } E = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx =$$

$$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx \quad (1)$$

Είναι

$$\bullet \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int_0^1 x' \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \\
&= \left[ x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \left[ \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \\
&= \left[ \ln(1 + \sqrt{2}) \right] - \left[ \sqrt{2} - 1 \right] = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1.
\end{aligned}$$

Οπότε η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} - (\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1) = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \\
&= \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}
\end{aligned}$$

**Δ3.** Επειδή  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  προκύπτει ότι  $f \uparrow$  στο  $\mathbb{R}$ .

Οπότε για  $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$ , ενώ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right] = 0$ .

τότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln |f(x)|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$ .

$$\begin{aligned}
\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln f(x) \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \cdot f(x) \cdot \ln f(x) \right]
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x)} = \frac{1 \cdot 0}{1} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ f(x) \ln f(x) \right] \stackrel{f(x) \neq u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (u \cdot \ln u) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{u}{-\frac{1}{u^2}} = - \lim_{n \rightarrow 0^+} u = 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \cdot f(x) \cdot \ln f(x) \right] = 0.$$

**Δ4.** Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{(x-2) \left( 1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left( 8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)}{(x-2)(x-3)} = 0, \quad x \in (2, 3).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = (x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2) dt\right) + (x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t) dt\right)$ ,

η οποία είναι συνεχής στο  $[2, 3]$  με

$$g(2) = -8 + 3\int_0^2 f^2(t) dt \text{ και } g(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2) dt$$

Όμως στο ερώτημα  $\Delta_2$  έχει αποδειχθεί ότι  $f(x) \leq x$ , για κάθε  $x \geq 0$ . Επειδή είναι και

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ προκύπτει: } f^2(x) \leq x^2 \text{ οπότε και } \int_0^2 f^2(x) dx < \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

Άρα  $g(2) < 0$ .

Από την  $f(x) \leq x$  τώρα θέτοντας όπου  $x$  το  $x^2$ , προκύπτει  $f(x^2) \leq x^2$  και έτσι

$$\int_0^1 f(x^2) dx < \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}. \text{ Άρα } g(3) > 0.$$

Συνεπώς  $g(2)g(3) < 0$  και έτσι από το θεώρημα Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (2, 3)$  ώστε

$g(x_0) = 0$ , δηλαδή ισοδύναμα η εξίσωση

$$\frac{(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2) dt\right) + (x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t) dt\right)}{(x-2)(x-3)} = 0, \text{ έχει μία τουλάχιστον λύση}$$

στο διάστημα  $(2, 3)$ .