

# Φάσμα<sub>Group</sub>

προπαρασκευή για  
Α.Ε.Ι. & Τ.Ε.Ι.

σύγχρονο

μαθητικό φροντιστήριο

25ης Μαρτίου 111– ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 20 990 – 210 50 27 990  
25ης Μαρτίου 74 – ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 50 658 – 210 50 60 845  
Γραβιάς 85 – ΚΗΠΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 51 557 – 210 50 56 296

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Καθηγητές: *Ομάδα Μαθηματικών Φροντιστηρίων Φάσμα*

Τάξη: Θετική – Τεχνολογική Κατεύθυνση

Ημερομηνία : 23 Μαρτίου 2014

Όνοματεπώνυμο:

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$  να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

*Μονάδες 8*

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της  $f$  στο  $+\infty$ ;

*Μονάδες 3*

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα που είναι γνωστό ως Κριτήριο Παρεμβολής.

*Μονάδες 4*

**A4.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις 1-5 και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της  $C_f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη  $C_f$ .

β) Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

γ) Κάθε συνάρτηση συνεχής στο  $\square$  δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

δ) Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ , τότε  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

ε) Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ακρότατο σε εσωτερικό σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

*Μονάδες 10*

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται  $z, w \in \mathbb{C}$  ώστε  $|1 + 2i - \bar{z}| = |iz - 3|$ ,  $\frac{(w + i\bar{w})^2}{2} = i(|w|^2 + 8)$

**B1.** Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  είναι ευθεία παράλληλη στη διχοτόμο  $2^{\text{ου}}-4^{\text{ου}}$  τεταρτημορίου καθώς και ότι εικόνες του  $w$  βρίσκονται στην υπερβολή  $y = \frac{4}{x}$ .

**Μονάδες 4+4**

**B2.** Να δείξετε ότι  $|z| \geq \sqrt{2}$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $|u - w| > |u - \bar{w}|$  με  $u$  σταθερό μιγαδικό και  $\text{Im}(u) < 0$ .

**α)** να δείξετε ότι  $\text{Im}(w) > 0$ .

**Μονάδες 5**

**β)** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του  $|z - w|$ .

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν

- $f''(x) < 0$ ,  $x \in [1, 2]$
- $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f'(2) = 1$

**Γ1.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (1, 2)$  με  $f''(x_0) < -1$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να δείξετε ότι  $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$  για κάθε  $x \in (1, 2)$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν  $8 \int_1^2 xf'(x)dx = 23$  να βρείτε το εμβαδόν που σχηματίζει η γραφική παράσταση της  $f$  και η ευθεία  $y = 2x - 2$

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε  $\int_2^x \left( \int_1^y f(t) dt \right) dy \geq 4x - 8$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $\int_1^2 f(t) dt = 4$

*Μονάδες 6*

**Δ2.** Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $\int_1^\xi f(t) dt = 2$

*Μονάδες 6*

**Δ3.** αν  $\Phi(x) = \int_1^x f(t) dt \cdot \int_x^2 f(t) dt$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε

**α)** να δείξετε ότι  $\Phi(x) = 4 - \left( \int_1^x f(t) dt - 2 \right)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

*Μονάδες 6*

**β)** να δείξετε ότι η  $\Phi$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

*Μονάδες 7*

Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες.  
**Καλή επιτυχία!**