

25ης Μαρτίου 111  
25ης Μαρτίου 74  
Γραβιάς 85  
Πρωτεσιλάου 63

ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ  
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ  
ΚΗΠΟΥΠΟΛΗ  
ΙΛΙΟΝ

☎ 210 50 20 990 &  
☎ 210 50 50 658 &  
☎ 210 50 51 557 &  
☎ 210 26 32 505 &

210 50 27 990  
210 50 60 845  
210 50 56 296  
210 26 32 507

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ  
Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
Ημερομηνία: 23 Νοεμβρίου 2014  
Όνοματεπώνυμο: .....

**Θέμα Α**

- A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών. (9 μονάδες)
- A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του. (6 μονάδες)
- A3. Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις :
1. Στην επέκταση από το  $\mathbb{R}$  στο  $\mathbb{C}$  μεταφέρονται η διάταξη και οι ιδιότητες της.
  2. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των  $f$  και  $f^{-1}$  είναι υποχρεωτικά πάνω στην ευθεία  $y = x$ .
  3. Έστω οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με πεδία ορισμού τα  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, αν  $f(A) \cap B = \emptyset$  Τότε η  $g \circ f$  δεν ορίζεται.
  4. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μια συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.
  5. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$ .

(10 μονάδες)**Θέμα Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $f(z) = \frac{i}{|z-2| - |z-1|}$

- B1. Να δείξετε ότι για να ορίζεται ο μιγαδικός  $f(z)$  πρέπει  $Re(z) \neq \frac{3}{2}$ . (Μονάδες 5)
- B2. Να δείξετε ότι  $|f(z)| \geq 1$ . (Μονάδες 6)
- B3. Αν  $f(z) = i$ , τότε:
- α) Να δείξετε ότι  $|z-1| + Re(z) = 1$  (Μονάδες 7)
- β) Αν  $z$  είναι ο μιγαδικός που επαληθεύει την εξίσωση του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι  $Re(z) \leq 1$  και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του. (Μονάδες 2+5)

### Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  τέτοια ώστε

- $xf^2(x) = x^2 \eta\mu^2 x$ , για  $x \in [0, 2\pi]$  και
- $f(x) \geq 0$ , για  $x \in \left[ \frac{2014}{2015} \pi, \frac{2015}{2014} \pi \right]$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in [0, 2\pi]$  ώστε

$$14f(x_0) = 11f\left(\frac{\pi}{9}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{20}\right) + f(e) \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

**Γ2.** Να δείξετε ότι  $f(0) = 0$  (Μονάδες 5)

**Γ3.** Να δείξετε ότι  $f(x) \neq 0$  για  $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  και ότι ο τύπος της  $f(x)$  είναι  $f(x) = \sqrt{x} \cdot |\eta\mu x|$ , για  $x \in [0, 2\pi]$ . (Μονάδες 2+5)

**Γ4.** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της  $f$  (Μονάδες 7)

### Θέμα Δ

Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  μια γνησίως φθίνουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 3}{x} = 3$
- $2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)f(x) \leq x^2 - 1$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ .
- $h(x) = f(x) - \ln x - 3$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 3$  και  $f(1) = 2$ . (Μονάδες 6)

**Δ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $h$  και να αποδείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα. (Μονάδες 8)

**Δ3.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = e^{f(x)-3}$  τέμνει την ευθεία  $y = x$  σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ . (Μονάδες 5)

**Δ4.** Αν επιπλέον  $f'(1) = 3e$  να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του γραφήματος της παραγώγου της συνάρτησης  $g$  με τετμημένη  $\xi \in (0, 1)$  έτσι ώστε η εφαπτομένη να είναι να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 6)

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**