

Φάσμα & Φάσμα_{Group}

σύγχρονο

προπαρασκευή για
Α.Ε.Ι. & Τ.Ε.Ι.

μαθητικό φροντιστήριο

25ης Μαρτίου 111 – ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 20 990 – 210 50 27 990

25ης Μαρτίου 74 – ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 50 658 – 210 50 60 845

Γραβιάς 85 – ΚΗΠΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 51 557 – 210 50 56 296

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Καθηγητές: **Ομάδα Μαθηματικών Φροντιστηρίων Φάσμα**

Τάξη: **Θετική – Τεχνολογική Κατεύθυνση**

Ημερομηνία : **24 Μαρτίου 2013**

Όνοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα a, β , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο a, x_0 και $f'(x) < 0$ στο x_0, β να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 8

A2. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Πότε λέμε ότι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 4

A3. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

A4. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις 1-5 και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη C_f .

β) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

γ) Κάθε συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

δ) Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f παίρνει θετικές τιμές τότε και ο ρυθμός μεταβολής της είναι θετικός.

ε) Αν $f(x) = \int_{2013}^x G(t) dt$ και $h(x) = \int_{2012}^x G(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με G συνεχή συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $g = f - h$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται $f(z) = \frac{z+2i}{\bar{z}-2i}$ με $z \in \mathbb{C}$ και $z \neq -2i$.

B1. Δείξτε ότι $|f(z)| = 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $z \neq -2i$.

Μονάδες 5

B2. Εάν ισχύει $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ δείξτε ότι ο z είναι φανταστικός.

Μονάδες 6

B3. Αν $z_0 = 2i^{2015} - 2f(i)$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $w \in \mathbb{C}$ για τον

$$\text{οποίο ισχύει } |w + z_0| \leq \left| \frac{i \cdot f(z_0) \cdot z_0}{1 + i\sqrt{3}} \right|.$$

Μονάδες 8

B4. Από τους μιγαδικούς w του γεωμετρικού τόπου να βρείτε αυτόν που έχει το ελάχιστο μέτρο και να τον ονομάσετε w_1 και αυτόν που έχει το μέγιστο μέτρο να τον ονομάσετε w_2 .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β) .

Γ1. Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και ότι υπάρχει ένα μόνο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο.

Μονάδες 8

Γ2. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(x_1) - f'(x_2) > \frac{f(x_0)}{\beta - \alpha}$

Μονάδες 7

Γ3. Αν επιπλέον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) , να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) < 0$

Μονάδες 5

Γ4. Αν z μιγαδικός για τον οποίο ισχύει η σχέση $\ln|z - 20 - 13i|^{f(x)} = f(x) - |f(x) \cdot (z - 20 - 13i)|$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z \neq 20 + 13i$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και έχει $f(0) = 0$, $f(1) = -2$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ο τύπος της g είναι : $g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$ για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι : $2e^x + \int_1^{e^x} \frac{f(t)}{t} dt \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi > 0$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\int_2^\xi f(t) dt = (5 - \xi) f(\xi)$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (1, 2)$ ισχύει η ανίσωση:

$$(x-1) \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt < \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$$

Μονάδες 7

Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες.

Καλή επιτυχία!