Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**
Καθηγητές: **ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**
Τάξη: **Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**
Ημερομηνία: **18/11/2012**
Ονοματεπώνυμο:

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

(4 μονάδες)

Α2. Αν $P(x)$ πολυώνυμο και $x_0\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

(4 μονάδες)

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα που είναι γνωστό ως Κριτήριο Παρεμβολής.

(3 μονάδες)

Α4. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

(4 μονάδες)

Α5. ***Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις :***

1. Αν f αντιστρέψιμη τότε οι συναρτήσεις $f\circ f^{-1}$ και $f^{-1}\circ f$ είναι ίσες.
2. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
3. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x\to\beta}g(x)=\gamma$ και $f(x)\neq\beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha}g\big(f(x)\big)=\gamma$
4. Για $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ είναι $\mathrm{Re}(z_1z_2)=\mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)$.
5. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε για δεδομένο $a\in\mathbb{R}$ να ισχύει $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$

(10 μονάδες)

Θέμα Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z-2|+\dfrac{1}{|z-2|}=2,\ z\neq 2$ (1).

Β1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των παραπάνω μιγαδικών z.

(7 Μονάδες)

Β2. Να προσδιορίσετε τους $z\in\mathbb{C}$ που ικανοποιούν τη σχέση (1), ώστε οι εικόνες του $z+i$ να βρίσκονται στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

(7 Μονάδες)

Β3. Αν $z_1=1,\ z_2=2+i$ και $A_\kappa=\left(z_2-z_1\right)^{\kappa}+\left(\overline{z}_2-z_1\right)^{\kappa}$ με κ θετικό άρτιο, να αποδείξετε ότι :

i. $A_\kappa=\begin{cases}(-1)^{\lambda}\cdot 2^{2\lambda+1}, & \text{αν } \kappa=4\lambda\\ 0 & ,\text{αν } \kappa=4\lambda+2\end{cases},\lambda\in\mathbb{N}^*$

(6 Μονάδες)

ii. $4\leq\left|2013\cdot A_{2014}+\overline{z}+1-4i\right|\leq 6$, όπου z μιγαδικός που ικανοποιεί τη σχέση (1).

(5 Μονάδες)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : [0 , 4] →R για την οποία ισχύουν :

$f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(4)=2$

f παραγωγίσιμη στο (0 , 4)

f ΄ συνεχής στο (0 , 4)

Να δείξετε ότι :

Γ1. Υπάρχει $x_1 \in (0\,,\,4)$ ώστε $f\,'(x_1)=1$

(5 μονάδες)

Γ2. Υπάρχει $\xi \in (0\,,\,4)$ τέτοιο ώστε $f\,'(\xi)= \dfrac{1}{4}$

(12 μονάδες)

Γ3. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0\,,\,4)$: $f\,''(x_0)<0$.

(8 μονάδες)

Θέμα Δ

Θεωρούμε την συνάρτηση f : R→R με $f(x) = x^3+x+1$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(4 μονάδες)

Δ2. Να δείξετε ότι : $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(\psi)\right| \le |x-\psi| \le \left|f(x)-f(\psi)\right|$ *για κάθε* $x,\psi \in \mathbb{R}$

(5 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο R.

(3 μονάδες)

Δ4. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 1} f^{-1}(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu f^{-1}(x)}{x-1}$.

(7 μονάδες)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0\,,\,1)$: $f^{-1}(\xi)+2\xi = 0$

(6 μονάδες)

<<Είχα το σπάνιο προνόμιο να μπορέσω να ακολουθήσω ως ενήλικας το όνειρο που είχα όταν ήμουν παιδί.
Εάν μπορείς να εργαστείς πάνω σε κάτι που σημαίνει τόσα πολλά για σένα είναι μια ανταμοιβή μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο μπορεί να φανταστεί κανείς. Έχοντας επιτέλους λύσει το τελευταίο θεώρημα με κάνει να νιώθω λυπημένος κατά κάποιο τρόπο, όμως έχω επίγνωση ότι έχω καταφέρει κάτι εξαιρετικό. Και φυσικά αισθάνομαι απελευθερωμένος. Ήμουν τόσο παθιασμένος με το πρόβλημα που δεν έπαυα να σκέπτομαι για αυτό. Όταν ξυπνούσα το πρωί και όταν πήγαινα για ύπνο το βράδυ, χωρίς καμία διακοπή για οκτώ χρόνια. Αυτός είναι πολύ μεγάλος χρόνος για να σκέπτομαι μόνο ένα πράγμα. Αυτή η ιδιαίτερη Οδύσσεια έχει τελειώσει. Το μυαλό μου επιτέλους ξεκουράζεται.>>

Άντριου Τζον Γουάιλς , ο μαθηματικός που απέδειξε το διάσημο τελευταίο θεώρημα του Φερμά.

Διάρκεια εξέτασης **: 3 ώρες.**

Καλή επιτυχία!