

σύγχρονο

Φάσμα
& Group
προπαρασκευή για
Α.Ε.Ι. & Τ.Ε.Ι.

μαθητικό φροντιστήριο

25ης Μαρτίου 111 – ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 20 990 – 210 50 27 990

25ης Μαρτίου 74 – ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 50 658 – 210 50 60 845

Γραβιάς 85 – ΚΗΠΟΥΠΟΛΗ – ☎ 210 50 51 557 – 210 50 56 296

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Καθηγητές: ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ

Τάξη: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 04/11/2012

Όνοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1ο:

A. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = c f(x)$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι : $F'(x) = c f'(x)$.

Μονάδες 9

B. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$.

Να αιτιολογήσετε γιατί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ισούται με την παράγωγο της f στο $x = x_0$.

Μονάδες 11

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

1) Η συνάρτηση $f(x) = -\ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα .

2) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

3) Αν η θέση ενός σώματος που κινείται σε άξονα δίνεται από τη σχέση $x(t) = t^2 - t + 1$, τότε κάθε χρονική στιγμή το σώμα επιταχύνεται.

4) Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = 2x^2y + y^2$. Ο ρυθμός μεταβολής της ως προς x θα είναι ο $4xy$ και ο ρυθμός μεταβολής της ως προς y θα είναι $2x^2 + 2y$.

5) Αν μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και ισχύει $f(1+h) = 2h^2 + 3h + 1, \forall h \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $f'(1) = 3$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο:

A. Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 2}{1 - \sigma\upsilon\nu x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ a^2 + 4a, & x = 0 \end{cases}$$

Μονάδες 7

B. Να βρεθούν οι α, β και $\gamma \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,3)$, διέρχεται από το σημείο $B(-1,8)$ και η εφαπτομένη του στο B έχει κλίση -6.

Στη συνέχεια να γίνει το διάγραμμα της f.

Μονάδες 9

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει :

$$\alpha \cdot f''(x) + \beta \cdot f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο:

A. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + 4x) = x^3 + \ln x, \quad x > 0 \quad (1).$$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$$A(5, f(5)).$$

Μονάδες 9

B. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x^3 - 3x + 2)] = 2$,

να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι : $2x + \ln x \leq 2x\sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο:

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x, x>0$.

Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ και A το σημείο τομής της ε με τον άξονα $y'y$.

i) Να αποδειχτεί ότι η προβολή του τμήματος AM στον $y'y$ έχει σταθερό μήκος, δηλαδή ανεξάρτητο του x_0 .

ii) Να βρεθεί το x_0 , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο x_0 , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y=f(x_0)$, να είναι ίσο με 2 τ.μ.

Μονάδες 12

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

ii) Αν $\alpha > \beta > e$, να αποδείξετε ότι $a^\beta < \beta^\alpha$.

iii) Να συγκριθούν οι αριθμοί $2^{\sqrt{3}}$ και 3.

Μονάδες 13

Σας ευχόμαστε επιτυχία.

Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες.

Τα μαθηματικά διαθέτουν όχι μόνο αλήθεια, αλλά και ανώτερη ομορφιά τόση όση μόνον η πιο μεγαλειώδης τέχνη μπορεί να επιδείξει.

BERTRAND RUSSELL