

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
20 ΜΑΪΟΥ 2016
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 150.
 A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87.
 A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14.
 A4. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνμική με

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1 \right)' = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x + 6 = x^2 - 5x + 6.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
f'	$+$	\ominus	\ominus	$+$
f				
	\max $f(2) = \frac{11}{3}$		\min $f(3) = \frac{7}{2}$	

Άρα η f παρουσιάζει:

- α) στη θέση $x_1 = 2$ τοπικό μέγιστο $f(2) = \frac{11}{3}$.
 β) στη θέση $x_2 = 3$ τοπικό ελάχιστο $f(3) = \frac{7}{2}$.

B2. α' τρόπος) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0).$$

Όμως $f(0) = -1$ και $f'(0) = 6$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι:

$$y + 1 = 6(x - 0) \Leftrightarrow y = 6x - 1.$$

β' τρόπος) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι της μορφής:

$$y = \lambda x + \beta, \text{ όπου } \lambda = f'(0).$$

Επειδή $f'(0) = 6$ η εξίσωση γράφεται $y = 6x + \beta$.

Επειδή $f(0) = -1$ το σημείο A έχει συντεταγμένες $(0, -1)$ και επειδή επαληθεύει την $y = 6x + \beta$ έχουμε: $-1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$.

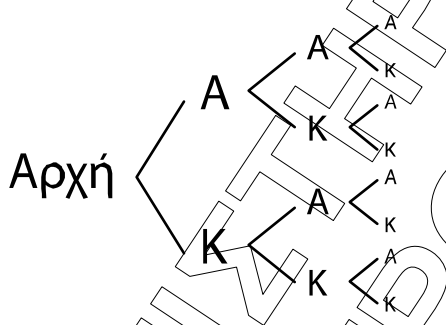
Έτσι προκύπτει τελικά ότι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 6x - 1$.

B3. Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 6)(x + 1)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 6) = -7 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το ζητούμενο δεντροδιάγραμμα είναι:



Έτσι ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{AAA, AAK, AK A, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

Γ2. $A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$

$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$

$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$

Γ3. α) $\Delta = A \cap B = \{KAK, KKA, KKK\}$

$$E = A \cup B = \{KAA, AKK, KAK, KKA, KKK\}$$

$$Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}.$$

Οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}, \quad P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}, \quad P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

β) $P(H) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

$$P(\Theta) = P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \\ = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 2 \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
$[8, 8 + c) = [8, 12)$	$x_1 = 10$	$v_1 = 20$
$[8 + c, 8 + 2c) = [12, 16)$	$x_2 = 14$	$v_2 = 15$
$[8 + 2c, 8 + 3c) = [16, 20)$	$x_3 = 18$	$v_3 = 10$
$[8 + 3c, 8 + 4c) = [20, 24)$	$x_4 = 22$	$v_4 = 5$
ΣΥΝΟΛΟ		$v = 50$

Ο προσδιορισμός του c προκύπτει από το δεδομένο $x_2 = 14$.

$$x_2 = 14 \Leftrightarrow \frac{(8+c) + (8+2c)}{2} = 14 \Leftrightarrow \frac{16+3c}{2} = 14 \Leftrightarrow c = 4$$

Δ2. Αφού $c = 4$ προκύπτει ότι $x_1 = \frac{8+12}{2} = 10$,

$$x_3 = \frac{16+20}{2} = 18, \quad x_4 = \frac{20+24}{2} = 22.$$

Δίνεται ότι η μέση τιμή είναι 14, άρα:

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{v} \cdot (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4) = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{v} \cdot (20 \cdot 10 + 15 \cdot 14 + 10 \cdot 18 + v_4 \cdot 22) = 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 200 + 210 + 180 + 22 \cdot v_4 = 14 \cdot (20 + 15 + 10 + v_4) \Leftrightarrow 590 + 22 \cdot v_4 = 14 \cdot (45 + v_4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 590 + 22 \cdot v_4 = 630 + 14 \cdot v_4 \Leftrightarrow 8 \cdot v_4 = 40 \Leftrightarrow v_4 = 5$$

Δ3. Το πλήθος των υπολογιστών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά ισούται με το συνολικό τους πλήθος μείον το πλήθος των υπολογιστών που χρειάστηκαν έως 9 λεπτά.

$$\text{Εώς 9 λεπτά χρειάστηκαν } \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 \text{ υπολογιστές.}$$

Έτσι το ζητούμενο πλήθος είναι 45.

- Δ4. Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης, θα χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο πίνακα:

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i^2 \cdot v_i$
10	20	200	2000
14	15	210	2940
18	10	180	3240
22	5	110	2420
Σύνολο	50	700	10600

$$S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum x_i^2 v_i - \frac{(\sum x_i v_i)^2}{v} \right\} = \frac{1}{50} \cdot \left[10.600 - \frac{700^2}{50} \right] =$$

$$\frac{1}{50} \cdot \left(10.600 - \frac{490.000}{50} \right) = \frac{1}{50} \cdot (10.600 - 9.800) =$$

$$\frac{1}{50} \cdot 800 = 16. \text{ Άρα τελικά } s = 4.$$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} \approx 0,28 > 0,1. \text{ Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

- Δ5. Είναι $y_i = \frac{80}{100} \cdot x_i = 0,8 \cdot x_i$, όπου y_i οι αντίστοιχες τιμές των επιδόσεων των νέων υπολογιστών.

Από σχετική εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, ισχύει ότι:

$$\bar{y} = 0,8 \cdot \bar{x} \text{ και } S_y = 0,8 \cdot S_x.$$

$$\text{Επομένως } cv_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{0,8 \cdot S_x}{0,8 \cdot \bar{x}} = \frac{S_x}{\bar{x}} = cv_x$$

Άρα το καινούργιο δείγμα χρόνων δεν είναι ομοιογενές, όπως και το προηγούμενο.