<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 334, σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σελ. 247, σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία σελ. 222, σχολικού βιβλίου.

Α4. **α)** $\to$ Λ, **β)** $\to$ Σ, **γ)** $\to$ Σ, **δ)** $\to$ Λ, **ε)** $\to$ Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

- Η δοσμένη σχέση γράφεται:
  $|z-2|^2 + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0$.
  Αν $|z-2| = y$ είναι $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -2$.
  Όμως $y = |z-2| \geq 0$ άρα $|z-2| = 1$.
  Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα ρ = 1.
- Εξάλλου είναι $|z| = |z-2+2| \leq |z-2| + |2| = 1 + 2 = 3$ άρα $|z| \leq 3$.

Β2. Είναι $z_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{-\Delta}i}{2}$ και $z_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{-\Delta}i}{2}$, οπότε

$$\left|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{2\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}\right| = 2 \Leftrightarrow 4\gamma - \beta^2 = 4 \quad (1).$$

Επειδή z_1 ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1 είναι:

$$\left(-\frac{\beta}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2} + 2\right)^2 + \frac{4\gamma - \beta^2}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4} + 2\beta + 4 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\beta + \gamma = -3 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\beta = -4$ και $\gamma = 5$.

Β3. Έστω $|\nu| \geq 4$. Έχουμε $\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \nu^3 = -\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0$.

Άρα $|\nu|^3 = \left|-\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0\right| = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right|$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι $|\nu|^3 = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_2\nu + \alpha_0\right| \leq \left|\alpha_2\nu^2\right| + \left|\alpha_1\nu\right| + \left|\alpha_0\right| =$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ

$=|\alpha_2|\cdot|\nu^2|+|\alpha_1|\cdot|\nu|+|\alpha_0|$.

Από B_1 είναι $|\alpha_0|\le 3,\ |\alpha_1|\le 3,\ |\alpha_2|\le 3$, άρα

$\left|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right|\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3=3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)$.

Η τελευταία γράφεται $|\nu|^3\le 3\dfrac{|\nu|^3-1}{|\nu|-1}$ (είναι $|\nu|-1>0$ αφού $|\nu|\ge 4$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\nu|^3\left(|\nu|-1\right)\le 3\left(|\nu|^3-1\right)\Leftrightarrow |\nu|^4\le 4|\nu|^3-3$.

Όμως $4\cdot|\nu|^3-3\le 4\cdot|\nu|^3$ άρα $|\nu|^4\le 4\cdot|\nu|^3\Leftrightarrow |\nu|<4$ που είναι άτοπο.

Άρα $|\nu|<4$.

(2ος τρόπος)

Είναι $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0\Leftrightarrow \nu^3=-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0$.

Άρα $|\nu|^3=\left|-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0\right|=\left|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right|$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι $|\nu|^3=\left|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right|\le\left|\alpha_2\nu^2\right|+|\alpha_1\nu|+|\alpha_0|=$

$=|\alpha_2|\cdot|\nu|^2+|\alpha_1|\cdot|\nu|+|\alpha_0|$.

Από το B_1 είναι $|\alpha_0|\le 3,\ |\alpha_1|\le 3,\ |\alpha_2|\le 3$, άρα

$\left|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right|\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3=3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)$. Δηλαδή $|\nu|^3\le 3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)$ (1).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $|\nu|=1$, τότε $|\nu|<4$.

β) $|\nu|\ne 1$, τότε η (1) γράφεται: $|\nu|^3\le\dfrac{3\left(|\nu|^3-1\right)}{|\nu|-1}$ (2).

β$_1$) Αν $|\nu|<1$, τότε $|\nu|<4$.

β$_2$) Αν $|\nu|>1$, τότε η (2) γράφεται $|\nu|^3\left(|\nu|-1\right)\le 3\left(|\nu|^3-1\right)\Leftrightarrow|\nu|^4\le 4|\nu|^3-3$.

Όμως $4|\nu|^3-3<4|\nu|^3$, άρα $|\nu|^4<4|\nu|^3$ και επειδή $|\nu|>1$, προκύπτει $|\nu|<4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x\in\mathbb{R}$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)'=\left(\frac{x^2}{2}\right)'\Leftrightarrow\left[\frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}\right]'=\left(\frac{x^2}{2}\right)'\Leftrightarrow\frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c.$$

Για $x=0$: $\dfrac{1}{2}=c$.

Έτσι $\dfrac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ

Θέτουμε $g(x) = f(x) + x, \quad x \in \mathbb{R}$. Είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(0) = f(0) > 0$ θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f\left(g(x)\right) = \sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1$.

Άρα $\sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+1} = g(x) + 1 \quad (1)$.

Πρέπει $g(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 + \dfrac{3x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2\left(x + \dfrac{3}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

Τότε από την (1) προκύπτει:

$$g^2(x) + 1 = g^2(x) + 1 + 2g(x) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\varphi'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$.

Άρα έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-	0	+	
$\varphi(x)$		↗		↘		↗	

Προκύπτει τοπικό μέγιστο $\varphi(-1) = -1$ και τοπικό ελάχιστο $\varphi(0) = -2$. Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της φ για $x \in [0, +\infty)$ είναι το $[-2, +\infty)$, ενώ για $x < 0$ είναι $\varphi(x) < 0$.

Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα για την φ στο $(0, +\infty)$ και επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

(β' τρόπος)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Επίσης είναι $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι όμως $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα $1-1$.

Η εξίσωση τώρα $f\left(g(x)\right) = 1$ γράφεται $f\left(g(x)\right) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\in \mathbb{R}$ με $g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x)$
$x \in \mathbb{R}$. Ο πίνακας μεταβολών της g είναι:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g΄(x)		+	0	-	0	+	
g(x)		↗		↘		↗	

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$, $g(-1) = -\dfrac{1}{2}$, g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ άρα $g\left((-\infty,-1]\right) = \left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$. Άρα η g δεν έχει ρίζα $(-\infty,-1]$.
- $g(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $g(0) = -1$ και g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ άρα $g\left([-1,0]\right) = \left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$. Άρα η g δεν έχει ρίζα $[-1,0]$.
- $g(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$, g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα $g\left([0,+\infty)\right) = [-1,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $0 \in g\left([0,+\infty)\right)$, άρα υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $g(x_0) = 0$, που είναι και μοναδική αφού g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Θέτουμε $K(x) = \int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt - f\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot \text{εφ}x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Η K είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, ενώ επειδή $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

θα είναι $\int_{-\pi/4}^{0} f(t)dt > 0$, δηλαδή $K(0) > 0$.

Επίσης είναι $K\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -f(0)\cdot \text{εφ}\dfrac{\pi}{4} = -1 < 0$.

Έτσι όμως από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$ ή $\int_{x_0-\pi/4}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \dfrac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} = \lim_{h\to0}\left[5\cdot\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h} - \frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right] =$$

$$= 5f\,'(1) + f\,'(1) = 6f\,'(1).$$

διότι

- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot 5 \underset{\substack{h\to0\\u\to0}}{\overset{5h=u}{=}} 5\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u} = 5f'(1).$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ
ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h} = -\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h} \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{-h=t}{=}} -\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t} = f'(1).$

Άρα αφού

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow 6f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=0.$$

Για $0<x<1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<0$.

Για $x>1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1) \Rightarrow f'(x)>0.$

Άρα η f είναι $\downarrow$ στο $(0,1]$ και $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$ με $f'(1) = 0$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$.

Δ2. Είναι $g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}, \quad x\in(0,+\infty).$

Λόγω του $Δ_1$, αφού στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο, είναι $f(x)\geq f(1)=1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $f(x) > 1$ για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Έτσι $f(x) - 1 > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ και $x - 1 > 0$, άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_x^{x+1} g(u)du,\ x\in(1,+\infty)$.

Είναι $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$.

Όμως $x < x + 1$ και επειδή g γνησίως αύξουσα θα είναι $g(x) < g(x + 1)$,

άρα $\varphi'(x) > 0$, άρα φ γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Είναι $8x^2+5>1$ και $2x^4+5>1$, οπότε η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$\varphi(8x^2+5) > \varphi(2x^4+5) \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2).$$

Δ3. Είναι $g''(x = \dfrac{(f(x)-1)'(x-1)-(f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$.

Για την f στο $[1, x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(1,x): \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(\xi) \Rightarrow \dfrac{f(x)-1}{x-1} = f'(\xi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) - 1 = (x - 1)f'(\xi)$.

Άρα $g''(x) = \dfrac{f'(x)(x-1)-(x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$.

Είναι $\xi < x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x)-f'(\xi) > 0$.

Επίσης για $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$.

Έτσι $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα g κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$(a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \overset{a>1}{\Longleftrightarrow} g(x) = \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow g(x) = g'(a)(x-a).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης για την g στο $x=\alpha$ είναι

$y-g(a)=g'(a)(x-a)\overset{g(a)=0}{\Longleftrightarrow} y=g'(a)(x-a)$.

Αφού g κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή $g(x)\geq y \Rightarrow g(x)\geq g'(a)(x-a)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\alpha$.

Άρα η εξίσωση $g(x)=g'(a)(x-a)$ έχει μοναδική λύση $x=\alpha$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΦΑΣΜΑ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ